

03

Teorías vectoriales del campo electromagnético

Actualmente conocemos las ecuaciones de Maxwell en su forma operacional definitiva y se ha olvidado el proceso de razonamiento por el que se llegó a ellas. Por la similitud de las ecuaciones del electromagnetismo que habían obtenido experimentalmente sus predecesores, Maxwell desarrolló una analogía hidrodinámica con un modelo de fluidos en un medio resistivo, basado en interacciones se transmiten mediante vórtices en un éter que actúan como un mecanismo de ruedas engranadas.

Lo sorprendente es que con este modelo alejado de la realidad, pero con una gran intuición de a donde debería llegar, formuló las ecuaciones del electromagnetismo correctamente. Una vez comprobado que sus ecuaciones eran coherentes entre ellas y concordaban con la experiencia, abandonó su modelo mecánico por un concepto operacional de las mismas, tomándolas como punto de partida para sus aplicaciones.

Los grandes descubrimientos de los genios rara vez siguen un proceso lineal, y sólo la intuición les guía hacia donde quieren llegar, sobre todo porque habitualmente aún no existen las herramientas matemáticas adecuadas y las tienen que ir construyendo intuitivamente sobre la marcha.

El formalismo del electromagnetismo siempre ha ido de la mano de los modelos mecánicos y el éxito de esta similitud es debido -como veremos- a la peculiar relación que existe entre la energía y la masa según la teoría de relatividad, y a su cuantificación en fotones. El electromagnetismo es un fenómeno fundamentalmente relativista y cuántico. Sin embargo, en este capítulo analizaremos solamente los aspectos del electromagnetismo clásico, tal como lo formuló Maxwell en su versión final.

El gran logro de Maxwell fue reunir todas las leyes experimentales en un conjunto de ecuaciones que las predijesen. Sin embargo, estas ecuaciones contienen mucha más información que las leyes experimentales de las que parte, pues son capaces de predecir nuevos fenómenos, como la propagación de las ondas electromagnéticas y de la luz y los fenómenos de radiación, así como el comportamiento macroscópico del campo electromagnético en la materia.

Analizaremos el origen experimental de las ecuaciones de Maxwell y de cómo las propiedades de homogeneidad e isotropía impuestas al espacio y al tiempo permiten formularlas con ecuaciones en derivadas parciales de primer orden o en una formulación integral equivalente.

Los operadores vectoriales introducidos por Heaviside no son solo una simplificación formal, sino que también contienen un significado físico real y están determinados con las condiciones de invarianza ante rotaciones y translaciones en el espacio tiempo Newtoniano considerado.

Estas simetrías son el origen también de los principios de conservación de momento y energía, y de la posibilidad de propagación de la energía electromagnética como ondas sin distorsión y atenuación en el vacío, que son la base de la radiación de antenas y los modernos sistemas de telecomunicaciones.

Aunque este capítulo podría formar parte de un curso general sobre electromagnetismo. Sin embargo, su desarrollo se ha hecho pensando en los fundamentos que gobiernan el electromagnetismo clásico.

Concepto de campo

Un campo vectorial $\vec{A}(x, y, z, t)$ es un concepto matemático, cuyo significado es que existe una magnitud física $\vec{A}$ que toma un valor diferente en cada punto del espacio (x, y, z) y del tiempo t , con un módulo y una dirección determinada, de forma que si en un punto del espacio colocamos una carga de prueba, los efectos del campo se medirán por la fuerza que se produce sobre dicha carga. Por carga de prueba se quiere decir que es lo suficiente mente pequeña como para no afectar a la distribución del campo. El campo es un ente preexistente antes de colocar la carga y permanecerá aún después de retirarla.

El concepto de campo es muy útil para explicar las interacciones a larga distancia y eliminar el concepto de interacción instantánea que en la gravitación de Newton había planteado muchas paradojas. Además, como los campos se propagan con velocidades finitas, es el medio adecuado para tratar los problemas de interacciones en el tiempo.

Como el campo tiene en cada punto del espacio un módulo y una dirección determinada, para visualizarlos se siguieron las primitivas ideas de Faraday y Thomson en un principio.

Estos introdujeron el concepto de líneas de fuerza, de forma que en cada línea el campo es tangente a ella, y el número de líneas por unidad de superficie perpendicular a estas es proporcional a la intensidad del campo.

Esta idea de líneas de fuerza nos lleva más a razonamientos cualitativos que cuantitativos. Sin embargo en el caso de Faraday, que no tenía conocimientos matemáticos, le permitieron hacer sus grandes descubrimientos intuyendo que entre la luz, la electricidad y el magnetismo tenía que haber una relación profunda. Aunque ahora ya no se emplean este tipo de razonamientos, veremos más adelante, con una dosis de intuición se pueden también hacer predicciones cuantitativas sobre fenómenos tan complejos como la radiación por una carga acelerada, que es la base de la radiación de antenas.

Ecuaciones vectoriales de Maxwell

Seguiremos la notación vectorial desarrollada por Heaviside y Lorentz para las ecuaciones de Maxwell. Sistema Internacional de Unidades (SI) que es la más ampliamente utilizada hoy en día.

Aunque para estudiar la estructura de las ecuaciones de Maxwell es suficiente analizar el caso de una partícula puntual con carga, sin embargo, utilizaremos también la formulación más general como medios continuos.

Las magnitudes que entran en las ecuaciones de Maxwell son:

$\vec{E}$	Vector del campo eléctrico
$\vec{D}$	Vector de desplazamiento eléctrico
$\vec{B}$	Vector de inducción magnética
$\vec{H}$	Vector del campo magnético
ρ	Densidad de carga eléctrica
$\vec{j}$	Densidad de corriente

Los significados del campo electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell, en su forma vectorial e integral actual vienen definidas por:

Forma Diferencial

Forma Integral

Primer par de ecuaciones cinemáticas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ausencia de polos magnéticos

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Ley de Faraday

Forma Diferencial

Forma Integral

Segundo par de ecuaciones dinámicas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Ley de Coulomb

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t) \cdot d\vec{S}$$

Ley de Ampère

Interacción de las cargas con el campo electromagnético

$$\vec{f}_L = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Densidad de fuerza de Lorentz

Magnitudes macroscópicas promediadas en materiales dieléctricos y magnéticos.

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

Vector de polarización eléctrica

$$\vec{M} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{H}$$

Vector de magnetización

Relaciones de constitución

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

ϵ constante dieléctrica

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

μ permeabilidad magnética

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$

σ conductividad. Ley de Ohm

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Velocidad de la luz en el vacío

Se define como el producto escalar de dos vectores a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_i b_i$$

El producto vectorial de dos vectores se representa por

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

El producto vectorial también lo representaremos a veces mediante

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Donde ε_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico, que es 0 cuando dos índices son iguales, 1 si los índices ijk forman una permutación par de 123, y -1 si ijk es una permutación impar.

Los subíndices latinos $i = 1, 2, 3$ representan las componentes espaciales x, y, z . En todo el texto, salvo que se especifique lo contrario, seguiremos en convenio de la suma por el cual cuando aparecen dos índices iguales en una fórmula se deberán sumar para todos sus valores posibles.

La densidad de corriente de cargas $\vec{J}$ que aparece en las ecuaciones de Maxwell, se puede separar en dos partes, una debida a las corrientes de conducción

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$

y otra a corrientes de convección procedente de las cargas en movimiento

$$\vec{J}_v = \rho \vec{v}$$

de forma que sea

$$\vec{J} = \vec{J}_v + \vec{J}_c = \rho \vec{v} + \sigma \vec{E}$$

En el vacío las constantes dieléctrica y permitividad magnética toman unos valores constantes que se representan por ϵ_0 y μ_0 y su producto esta relacionados con la velocidad de la luz en el vacío

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Las ecuaciones de Maxwell vienen definidas por cuatro ecuaciones en derivadas parciales de modo que si el estado electromagnético está definido en un instante por $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$, entonces las ecuaciones permiten por integración conocer el estado del campo para todos los instantes de tiempo.

Es necesario complementar las ecuaciones de Maxwell con una expresión matemática que exprese como el campo electromagnético interacciona con la materia.

Los significados del campo electromagnético

Esto viene dado en la teoría vectorial por la fuerza de Lorentz, que determina las fuerzas que crean el campo electromagnético sobre las cargas eléctricas.

Sin embargo, aunque esta teoría ha tenido un gran éxito en el electromagnetismo vectorial clásico, es incompleta, y crea un híbrido entre una teoría de medios continuos y otra de partículas de medios discretos.

Veremos más adelante que existen otras teorías conceptualmente muy diferentes para resolver estas dificultades, y que la historia del electromagnetismo es en la práctica el conocer como el campo electromagnético interacciona con la materia.

Las ecuaciones de constitución establecen como se modifica el campo electromagnético dentro de la materia. Veremos que son ecuaciones empíricas válidas solo para ciertas condiciones.

Una pregunta básica del electromagnetismo es determinar que configuraciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son compatibles con las ecuaciones de Maxwell cuando todas las magnitudes y fuerzas del campo son constantes en el tiempo. Al hacer la pregunta de esta forma, en vez de predecir los estados del campo para otro instante de tiempo, lo que se determina son las configuraciones espaciales permitidas para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ para una distribución de cargas y corrientes dada.

El que el campo electromagnético se exprese mediante un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, establece una gran diferencia respecto de la mecánica clásica de partículas, en que es posible cualquier configuración estática de partículas suponiendo unas fuerzas adecuadas.

Cuáles son las magnitudes fundamentales del campo electromagnético dentro de la teoría vectorial clásica es más bien una cuestión de definición operacional y, como veremos, se establece generalmente por sus efectos experimentales sobre la materia aunque no hay una unidad de criterios.

Según cambia la teoría de interpretación de la interacción del campo electromagnético con la materia así se modifica el significado que se le da al campo electromagnético.

Analizaremos en primer lugar cada una de las ecuaciones de Maxwell en su relación física y matemática con los experimentos que dieron lugar a ellas.

No debemos olvidar, que la base de las ecuaciones de Maxwell es experimental y que, para la justificación de estas, veremos que se requieren teorías más profundas.

Ley experimental de Coulomb

En el vacío, la primera ecuación del segundo par de las ecuaciones de Maxwell, toma la expresión en coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

siendo ρ la densidad de carga eléctrica.

La divergencia en un punto es una medida del flujo de un campo vectorial a través de una superficie infinitesimal por unidad de volumen, o de la intensidad de una fuente por unidad de volumen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{D} \cdot \vec{n} dS}{\Delta V}$$

donde ΔV es un pequeño volumen en un punto del espacio, ΔS es la superficie que lo encierra, dS es un elemento de dicha superficie y $\vec{n}$ es un vector unitario normal a la superficie dirigido hacia el exterior.

La divergencia también se representa con las notaciones equivalentes, que utilizaremos indistintamente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \equiv \text{div} \vec{D} \equiv \partial_i D^i \equiv \frac{\partial D^i}{\partial x^i}$$

Un campo vectorial cuya divergencia es cero se dice que es solenoidal.

El teorema de Gauss nos dice que la divergencia de un vector integrada en un volumen V es igual a la integral de superficie de dicho vector en la superficie que encierra dicho volumen.

Aplicando dicho teorema nos da formula integral

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV = q$$

donde q es la carga total encerrada en el volumen V

Si suponemos que la densidad de carga es homogénea o que tenemos una carga puntual, y que además la superficie S es esférica de radio r , se verificará

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D$$

Los significados del campo electromagnético

En el vacío $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ por lo que con estas hipótesis será

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Aplicando la ecuación de la fuerza de Lorentz, la fuerza que actuará sobre una carga q' situada en un punto de la superficie S al no haber campo magnético será

$$F = q'E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

que es la conocida ley experimental descubierta por Coulomb, que nos dice que la fuerza entre dos cargas es proporcional al producto de sus magnitudes, y varía con el inverso del cuadrado de su distancia.

Este es un ejemplo de cómo una simple ley experimental se generaliza matemáticamente, y es el punto de partida para desarrollar toda la teoría del potencial que se analizará más adelante.

Ley experimental de Faraday

84

La segunda ecuación cinemática de Maxwell en su forma diferencial en coordenadas cartesianas es

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

El vector rotacional es una medida de la circulación de un vector, y se puede definir como

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

donde $\vec{n}$ es la normal a la superficie ΔS que se apoya sobre una curva cerrada C que tiende a cero, y $d\vec{\ell}$ es un elemento tangente a la curva de dicho circuito.

El rotacional también se representa con las notaciones equivalentes

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \equiv \text{rot} \vec{E} \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j}$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de orden 3, siendo cero si dos componentes son iguales, y 1 para una permutación par de los índices.

Un vector cuyo rotacional es cero, se dice que es irrotacional.

El teorema de Stokes demuestra que la circulación de un vector alrededor de un circuito cerrado es igual al flujo del rotacional de dicho vector, y por tanto, se verificará

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

que es la ley experimental de Faraday que relaciona variación del flujo de la inducción magnética que atraviesa un circuito cerrado con el campo eléctrico que se genera en dicho en dicho circuito.

Hay que hacer el comentario de que $\vec{E}$ es el campo eléctrico total, y la ley de Faraday en su forma primitiva se refería sólo al campo eléctrico inducido; sin embargo, es este último el que hace una contribución neta a la circulación a lo largo de un circuito cerrado, ya que la otra parte corresponde a un campo eléctrico irrotacional, cuya circulación se anula en un circuito cerrado.

Para una espira circular de radio r tenemos

$$E_i = - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

La anterior ecuación expresa la ley de Lenz, por la que un flujo magnético variable induce una fuerza electromotriz eléctrica en la espira, que genera una corriente que a su vez produce un campo magnético que trata de oponerse a la variación del flujo.

85

Ley experimental de Ampère

La segunda ecuación dinámica de Maxwell viene representada por

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

En el vacío, fuera de materiales dieléctricos y magnéticos, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, por lo que se cumple

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Aplicando el teorema de Stokes a un circuito cerrado C que encierra una superficie S obtenemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Los significados del campo electromagnético

que nos dice, que en el vacío, la circulación de la inducción magnética alrededor de un circuito cerrado es igual a las corrientes que lo atraviesan más un término denominado corriente de desplazamiento.

Se ha definido la intensidad de corriente como la carga por unidad de tiempo que atraviesa la superficie S

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

En condiciones estacionarias sin variaciones con el tiempo de los campos, con corrientes continuas, será

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Para un conductor rectilíneo, por el que circula una corriente I , a una distancia r del eje la inducción magnética viene dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

que expresa la conocida ley de Ampère, que fue observada inicialmente de forma experimental por Oersted, al comprobar que las corrientes generan campos magnéticos que actúan sobre la aguja de una brújula.

Si colocásemos una carga q a una distancia r del conductor, esta experimentaría una fuerza que viene dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Uniendo las dos anteriores ecuaciones, se encuentra que si consideramos dos conductores paralelos de longitud L por los que circulan corrientes iguales en la misma dirección, estos experimentarían una fuerza de atracción por unidad de longitud que viene dada por

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} L$$

Esta es la ley de Ampère postulando que el magnetismo es electricidad en movimiento. A partir de aquí, se siguió un proceso de definición de las unidades del sistema internacional SI, que debe su razón de ser al proceso histórico en que se realizaron los descubrimientos de los fenómenos electromagnéticos, si bien actualmente también se utilizan otros sistemas de unidades más racionales, de acuerdo la estructura de las ecuaciones de Maxwell una vez conocidas en su conjunto.

03 Teorías vectoriales del campo electromagnético

Se define como 1 amperio de corriente, a la corriente que circula por dos conductores paralelos separados 1 metro, cuando la fuerza de atracción por unidad de longitud entre ellos es igual $2 \cdot 10^{-7}$ Newton/metro. Con esta definición se obtiene que la permitividad del vacío debe ser

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Newton}}{\text{Amperio}^2}$$

Como la corriente es la carga por segundo que pasa por la sección de un conductor, se definió como 1 Coulombio la carga que circula con la corriente de 1 Amperio.

$$1 \text{ Amperio} = 1 \text{ Coulombio/segundo}$$

Con esta definición de unidad de carga -según la ley de Coulomb-, cuando la fuerza de repulsión entre dos cargas iguales a un Coulombio separadas un metro es igual a un Newton, el valor de la constante dieléctrica del vacío ϵ_0 toma el valor

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulombio}^2}{\text{Newton} \cdot \text{metro}^2}$$

Posteriormente, Maxwell demostró mediante la ecuación de propagación de las ondas electromagnéticas, que la velocidad de la luz viene dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792410^8 \text{ m/s}$$

87

Aunque parezca un poco extraña esta forma de expresar las unidades, se debe tener en cuenta que las leyes de Coulomb y Ampère nos definen dos ecuaciones independientes, por lo que solo tenemos dos variables a determinar. En su momento, esta forma de proceder estaba justificada, cuando no se conocía la totalidad de las ecuaciones de Maxwell.

Veremos más adelante, que a partir de principios más generales, existen cuatro parámetros que nos permiten fijar los sistemas de unidades de las ecuaciones de Maxwell. Unos sistemas de unidades son más adecuados que otros según las aplicaciones, pero todo ello ha generado una gran confusión de notaciones y de interpretaciones.

Definida la unidad de corriente como el amperio, y determinadas experimentalmente ϵ_0 y μ_0 , las unidades de las restantes magnitudes electromagnéticas quedan fijadas en el sistema internacional de medidas S.I. por:

$$[I] = \text{Amperio} = \frac{\text{Coulombio}}{\text{seg}}$$

$$[\vec{E}] = \frac{\text{Voltio}}{\text{metro}} = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulombio}}$$

$$[\vec{B}] = \text{Tesla} = \frac{\text{Newton} \cdot \text{sg}}{\text{Coulombio} \cdot \text{metro}}$$

$$[H] = \frac{\text{Amperio}}{\text{metro}}$$

$$[\Phi] = \text{Weber} = \text{Tesla} \cdot \text{metro}^2 = \text{Voltio} \cdot \text{seg}$$

$$[R] = \text{Ohmio} = \frac{\text{Voltio}}{\text{Amperio}} = \frac{1}{376,73} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$[C] = \text{Faradio} = \frac{\text{Coulombio}}{\text{Voltio}}$$

$$[L] = \text{Henry} = \frac{\text{Voltio} \cdot \text{seg}}{\text{Amperio}}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Faradio}}{\text{metro}}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Henry}}{\text{metro}}$$

$$\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376,73 \text{ Ohmio}$$

$$k = 1,38065810^{-28} \frac{\text{Julio}}{\text{K}}$$

La elección de la constante μ_0 en realidad fue una cuestión de convenio para asegurar que las unidades electromagnéticas tienen un tamaño acorde con los valores industriales, lo que se puede aplicar también a las otras constantes.

Las unidades naturales se definen haciendo las constantes fundamentales iguales a la unidad, $c = \hbar = k = \mu_0 \equiv 1$, donde k es la constante de Boltzmann que relaciona la termodinámica con la mecánica.

Las constantes $c, \hbar, k, \mu_0$ en el sistema internacional S.I. no tienen ninguna relación con las constantes de acoplamiento eléctrica e (carga del electrón) y de gravitación universal G , ni tampoco con las interacciones nucleares fuerte y débil.

Ley experimental de la fuerza de Lorentz

De los experimentos para las leyes de Coulomb y de Ampère, considerando que las fuerzas que actúan sobre las cargas y las corrientes, son efectos independientes que se pueden superponer linealmente, se llegó a que la fuerza que sufre una carga q en presencia de un campo eléctrico y otro magnético, superpuestos, viene dada por

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Esta es una ley que también fue en un principio formulada experimentalmente.

La fuerza de Lorentz juega un papel fundamental en electromagnetismo, ya que según nos muestra la experiencia, solamente podemos determinar los efectos de los campos electromagnéticos a través de las fuerzas que producen sobre la materia.

Esto llevó en un principio a pensar que sólo los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ eran los campos fundamentales, ya que son los que aparecen en dicha ecuación de la fuerza de Lorentz. Sin embargo, veremos que dicha apreciación no es del todo correcta, y que hay otros efectos más sutiles que hacen que el electromagnetismo sea algo más complejo de lo que a primera vista se deduce de las ecuaciones de Maxwell.

Siempre existió una discusión sobre si la fuerza de Lorentz era una ley independiente, o no de las ecuaciones de Maxwell. Veremos más adelante que es la propia estructura matemática de las ecuaciones de Maxwell y de nuestro espacio tiempo lo que determina la forma de la fuerza de Lorentz, que sea lineal y que, además, no dependa de la aceleración de la carga, hechos que son muy importantes como veremos.

Por otra parte, la fuerza de Lorentz, tal como la conocemos, sólo puede existir en un espacio de tres dimensiones pues, en otro caso, el campo magnético no sería vectorial y tendría otras características tensoriales, por lo que nuestro mundo sería muy diferente. Pero para ello se necesitan teorías matemáticas más avanzadas que el cálculo vectorial, sobre el que se basa las ecuaciones de Maxwell, como veremos en capítulos posteriores.

Ley de ausencia de polos magnéticos

Hasta el presente, la experiencia ha mostrado que no existen fuentes o polos magnéticos similares a las cargas eléctricas, por lo que se postula que la divergencia del campo de inducción magnética es siempre nula

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Los significados del campo electromagnético

Por el teorema de Gauss obtenemos que

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

lo que nos dice que las líneas del flujo magnético siempre se cierran. Esto hace que en la práctica sea muy difícil apantallar los campos magnéticos y lo único que podemos hacer es reconducir dichas líneas de flujo con materiales magnéticos.

Los campos magnéticos, como veremos, se deben solamente a dipolos magnéticos generados por corrientes o a efectos microscópicos que tienen su origen en fenómenos cuánticos. Además, se demuestra que si existiesen monopolos magnéticos, estos estarían cuantizados, los fotones de luz tendrían masa, y la fuerza de Coulomb decaería exponencialmente, por lo que el Universo no podría existir tal como lo conocemos.

Vemos, por tanto, que las ecuaciones de Maxwell son una expresión matemática generalizada de un conjunto de leyes experimentales en una formulación vectorial o integral, con gran poder predictivo de nuevos fenómenos, a parte de los experimentos iniciales que permitieron formularlas. Sin embargo, no pueden dar más información de la que ya contienen inicialmente y es necesario desarrollar otras formulaciones o teorías más amplias para justificar por qué las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma dada y no otra o, lo que es lo mismo, cual es la razón última de la Naturaleza que las justifica.

Las ecuaciones de Maxwell también nos engañan con su aparente simplicidad, ya que no existe una solución analítica general. Si existiese dicha solución general, la carrera de ingenieros de telecomunicaciones y la carrera de físicas se simplificarían enormemente, ya que lo que hacen realmente durante varios años es resolver las ecuaciones de Maxwell en tantas aproximaciones como campos de especialidad existen. Solamente fijando determinadas hipótesis restrictivas de aplicación es posible su resolución aproximada.

Analizaremos algunas de ellas por el interés conceptual físico matemático que encierran, ya que éste no es un libro de electromagnetismo aplicado y aquí sólo hablamos sobre las ecuaciones y los conceptos que implican, así como de sus justificaciones últimas hasta donde podamos llegar con nuestra lógica.

Potenciales electromagnéticos

Según demuestra el cálculo vectorial, si la divergencia de un vector $\vec{B}$ es nula en todo el espacio, entonces existe un campo vectorial $\vec{A}$ cuyo rotacional genera dicho campo

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

A $\vec{A}$ se le denomina potencial vector magnético.

Obsérvese que $\vec{A}$ está indeterminado en el gradiente de una función escalar arbitraria, cuyo rotacional siempre es cero.

Veremos en otro capítulo, que estas indeterminaciones tienen su origen en la invarianza ante transformaciones físicas, y que tienen como consecuencia importante que se cumplan los principios de conservación.

En condiciones estacionarias que no dependen del tiempo, la segunda ecuación cinemática de Maxwell es

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Se demuestra por el análisis vectorial, que si el rotacional de un vector es nulo, existe una función escalar, tal que su gradiente es dicho vector.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

A ϕ se la denomina habitualmente como potencial escalar eléctrico.

Se define el gradiente de una función escalar en coordenadas cartesianas por

$$\vec{\nabla} \phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

El gradiente también se representa con la notación equivalente

$$\vec{\nabla} \phi \equiv \overrightarrow{\text{grad}} \phi \equiv \partial_i \phi$$

También se utiliza las siguientes notaciones abreviadas para la divergencia y el rotacional de un vector

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv \text{div } \vec{E} \equiv \partial_i E^i \equiv \frac{\partial E^i}{\partial x^i}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \equiv \text{rot } \vec{E} \equiv \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k \equiv \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j}$$

Es fácil comprobar que el rotacional de un gradiente y la divergencia del rotacional son idénticamente cero

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi \equiv 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \equiv 0$$

El gradiente y el rotacional son vectores y, ante un cambio de coordenadas, se transforman como las componentes de un vector. De manera similar, la divergencia es un escalar invariante ante dichos cambios de coordenadas. El gradiente y el rotacional son los únicos vectores que se pueden formar con las derivadas primeras, así como, la divergencia, es el único escalar que se puede formar a partir de un campo vectorial. El que sólo aparezcan en las ecuaciones de Maxwell estos operadores, es una consecuencia de la homogeneidad e isotropía del espacio de tres dimensiones. Iremos viendo en otros capítulos, que las propiedades del espacio tiempo condiciona la forma de las ecuaciones.

El hecho de que en las ecuaciones de Maxwell sólo aparezcan las derivadas primeras se debe a que dichas ecuaciones y la acción de campo electromagnético que estudiaremos más adelante tienen que ser invariantes ante determinadas transformaciones físicas. Sin embargo, ya del propio significado físico del gradiente, rotacional, y divergencia, nos dice que deben ser vectores o escalares ante transformaciones de coordenadas.

El incremento diferencial de una función escalar entre dos puntos infinitesimalmente próximos viene dada por el producto escalar

$$d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{x} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$$

siendo $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Por tanto, si es $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$, existe un potencial tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$, y se verificará entonces que $\vec{E} \cdot d\vec{x} = -d\phi$, por lo que al ser una diferencial exacta la integral de $\vec{E}$ entre dos puntos es independiente del camino y depende sólo de los valores extremos del potencial ϕ en esos puntos.

Repasaremos algunas definiciones y propiedades generales los potenciales como funciones escalares.

A partir de la anterior ecuación $d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{x}$, se demuestra que el vector gradiente de una función escalar ϕ tiene la dirección según la cual la función varía lo más rápidamente posible; su módulo es igual al límite del cociente entre el incremento de la función en la dirección de su máxima variación y el valor del desplazamiento cuando este tiende a cero.

Las superficies $\phi(x,y,z) = C$, donde C es una constante, definen las llamadas superficies de nivel o superficies equipotenciales. El vector gradiente en cada punto de la superficie equipotencial es normal a la superficie en dicho punto.

Se denominan líneas de gradiente de un campo escalar $\phi(x,y,z)$, a las que en cada punto, la tangente tiene la dirección del gradiente. Por tanto, las líneas de gradiente cortan perpendicularmente a las superficies equipotenciales, y estarán definidas por las ecuaciones

$$\frac{dx}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

Evidentemente, el campo eléctrico es tangente a las líneas de gradiente y es por ese motivo por lo que se les llama también líneas de flujo, siguiendo la representación visual de Faraday y Thomson que aquí se ha formalizado matemáticamente.

Tomando la divergencia del campo eléctrico, obtenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi \equiv -\nabla^2 \phi$$

donde ∇^2 es el operador laplaciana, que se define en coordenadas cartesianas por

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^i}$$

El operador laplaciana también se puede calcular por desarrollo en serie de Taylor, en un pequeño volumen cúbico de lado l que encierra un punto P_0 , resultando

$$(\nabla^2 \phi)_0 = \frac{24}{l^2} (\bar{\phi} - \phi_0)$$

donde $\bar{\phi}$ es el valor medio del potencial en el cubo, y ϕ_0 es su valor en el centro. Es decir, el valor de la laplaciana en un punto es una medida de la diferencia entre el valor medio de la función alrededor de ese punto y el valor en dicho punto.

Como corolario, para una función armónica que verifique $\nabla^2 \phi = 0$, el valor de la función en un punto será igual a su valor medio en un entorno próximo a dicho punto. Es decir, si hay un máximo local, debe haber un mínimo en su proximidad.

Otra propiedad importante que se desprende de la anterior definición es que, si se verifica la ecuación de Poisson $\nabla^2 \phi = \rho(x,y,z)$, entonces el valor de ϕ en un punto difiere de su promedio alrededor de dicho punto en una magnitud que es proporcional a la fuente $\rho(x,y,z)$ en ese punto.

Se demuestra que la laplaciana de una función escalar es el único escalar que se puede formar con las segundas derivadas que sea invariante ante transformaciones

espaciales de coordenadas como la traslaciones y la rotaciones. Del significado físico de la laplaciana, ya se intuye que debe ser así.

Vemos, una vez más, que las propiedades geométricas del espacio y la exigencia física de que los operadores sean invariantes ante traslaciones y rotaciones en el espacio, condiciona la forma posible de dichos operadores, lo que concuerda con la intuición de su interpretación física, que fue la que guió a Maxwell en la obtención de sus ecuaciones a partir de los resultados experimentales previos. Veremos que la invarianza ante las rotaciones en un plano espacio-tiempo impone otras restricciones adicionales a la forma estructural interna de dichas ecuaciones.

Teniendo en cuenta la primera ecuación del segundo par de Maxwell, obtenemos para el potencial la ecuación

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ecuación de Poisson}$$

que en ausencia de cargas viene dada por la expresión armónica

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace}$$

La primera ecuación cinemática de Maxwell nos dice que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Se demuestra, por análisis vectorial, que si la divergencia de un vector es idénticamente nula en todo el espacio, existe un campo vectorial tal que su rotacional genera dicho vector

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Es fácil comprobar, la suficiencia de esta condición, ya que la divergencia de un rotacional es idénticamente cero

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \equiv 0$$

Esta identidad nos permite obtener otra ecuación importante. Si tomamos la divergencia segunda ecuación dinámica de Maxwell, obtendremos la siguiente ecuación de continuidad

$$0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que expresa el principio de la conservación local de la carga eléctrica. En forma integral toma la expresión

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

que nos dice que, la disminución de la carga en un volumen V dado es igual a la carga que sale a través de la S superficie que lo delimita.

Un hecho importante a resaltar, es que este es un principio de conservación local y no global en que la carga desaparece de un punto para aparecer en otro distante.

El que la conservación de la carga sea local se debe, como veremos, a que las ecuaciones deben ser invariantes ante determinadas transformaciones físicas, y lo mismo sucede con la conservación local de la energía.

La teoría de la relatividad, a la que como veremos obedecen las ecuaciones de Maxwell, impone que todos los procesos de conservación tengan un carácter local. En el fondo, la constancia de la velocidad de la luz respecto a todos los sistemas inerciales que preserve el principio de causalidad, es lo que al final condiciona que todos los principios de conservación en la Naturaleza tengan un carácter local.

Las ecuaciones de Maxwell por sí misma no justifican el porqué de algunas de sus consecuencias y se requieren otras teorías más amplias que lo expliquen.

Una identidad vectorial muy útil es

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad \text{o} \quad \text{rot rot } \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

De la segunda ecuación cinemática de Maxwell, en condiciones estacionarias y en el vacío, obtenemos

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Aplicando la anterior identidad, obtenemos una ecuación similar a la de Poisson para el potencial vector en función de las corrientes estacionarias

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

habiéndose considerado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Esto siempre puede hacerse, teniendo en cuenta las identidades

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \wedge \equiv 0 & \text{o} \quad \text{div rot} \equiv 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \equiv 0 & \text{o} \quad \text{rot } \overrightarrow{\text{grad}} \equiv 0 \end{array}$$

Si hacemos la transformación gauge

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \phi \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda$$

se comprueba que las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ no cambian.

Los significados del campo electromagnético

Eligiendo una función Λ adecuada, podemos imponer la condición $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, y obtener así la ecuación de Poisson para el potencial vector. para ello basta escoger en este caso para Λ una solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Las anteriores transformaciones se denominan de transformaciones gauge de segunda clase. En física cuando hay una invarianza por una transformación, siempre existirá la conservación de alguna magnitud. Veremos que la razón de estas transformaciones de gauge, está ligada a la invarianza de las ecuaciones de Maxwell ante rotaciones relativistas de Lorentz en el espacio-tiempo y a otras simetrías físicas más complejas que implican la conservación local de la carga y de la energía.

Las ecuaciones de Maxwell para el caso estacionario en el vacío, adoptan la forma

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned}$$

y en función de los potenciales

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

con la condición gauge adicional

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

En el caso estacionario independiente del tiempo, vemos que las ecuaciones del campo eléctrico y de inducción magnética están desacoplados.

Propiedades de los potenciales en condiciones estacionarias

Teniendo en cuenta la identidad

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

donde $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ es la función delta de Dirac, que tiene las siguientes propiedades al actuar sobre una función $\vec{f}(\vec{x})$

$$\int_{V_\infty} f(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x \equiv \vec{f}(\vec{x}) \quad y$$

$$\int_{V_\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \equiv 1$$

los potenciales en condiciones estacionarias y en el vacío se pueden escribir en forma integral

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Esto es fácil de comprobar, ya que se verifica

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' = -\frac{\rho(\vec{x})}{4\pi\epsilon_0}$$

y de igual forma para el potencial vector $\vec{A}$.

Es fácil comprobar que para la anterior para expresión integral el potencial vector verifica la identidad $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv 0$.

En el caso de r cargas puntuales, las ecuaciones anteriores toman una forma más simple. Escribiendo las fuentes en función de la delta de Dirac, tenemos

$$\rho(\vec{x}, t) = q \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = q \vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

donde $\vec{x}_r(t)$ es la trayectoria de la r partícula con una carga q_r , $\vec{v}_r(t) = d\vec{x}_r/dt$ su velocidad. Se verificará entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_r q_r \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) = -q_r \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{J}(\vec{x}, t) = q_r \vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \wedge \vec{v}(t)$$

Los potenciales toman en este caso las expresiones

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_r \frac{q_r}{|\vec{x} - \vec{x}_p(t)|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_r \frac{q_r \vec{v}_r(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_r(t)|}$$

Los significados del campo electromagnético

Tomando el rotacional de la anterior ecuación, y haciendo unas transformaciones similares a las efectuadas, el campo de inducción magnética se puede escribir en función de las corrientes en la forma de la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{x}) = \int_{V_{\infty}} \frac{\mu_0 \vec{J}(\vec{x}') \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$$

que fue deducida en un principio experimentalmente por Biot-Savart, demostrando como las corrientes en conductores producían un campo magnético.

Para un elemento conductor por el que circula una corriente de intensidad I , la anterior expresión toma la forma

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I \int \frac{d\vec{l}' \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

y el potencial vector

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

donde $d\vec{l}'$ es un elemento del conductor lineal

Para una espira que se cierra situada en $\vec{x}'$, en un punto suficientemente lejos de ella, se obtiene

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

donde $\vec{m}$ es el momento dipolar magnético de la espira

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{x}' \wedge d\vec{l}' = IS$$

donde S es la superficie encerrada por la espira.

La inducción magnética vendrá dada por

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{m}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^5} \right)$$

que tiene un comportamiento dipolar.

En la naturaleza, al no haber polos magnéticos, todo el magnetismo tiene un carácter dipolar, y el magnetismo natural procede de microdipolos magnéticos que tienen su origen en efectos cuánticos.

En el vacío, fuera de las corrientes y en condiciones estacionarias, el campo magnético es irrotacional $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$, por lo que se puede derivar de un potencial magnético ϕ_m .

$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi_m$ junto con la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, nos da la ecuación armónica de Laplace

$$\nabla^2 \phi_m = 0$$

Para el caso anterior de la espira situada en origen de coordenadas será

$$\phi_m(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{4\pi|\vec{x}|^3} = \frac{I}{4\pi} \int_S \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{|\vec{x}|^3} dS = -\frac{I}{4\pi} \Omega$$

donde Ω es el ángulo sólido de la superficie de la espira visto desde el punto de observación situado en $\vec{x}$.

Si $\vec{x}^+$ y $\vec{x}^-$ son dos puntos situados justo a cada lado justo de la superficie de la espira, entonces haciendo una integración de $\vec{x}^-$ a $\vec{x}^+$ por un camino exterior sin cruzar el interior de la espira, obtenemos

$$\int_{\vec{x}^-}^{\vec{x}^+} \vec{B} \cdot d\vec{x} = -\mu_0 \int_{\vec{x}^-}^{\vec{x}^+} \vec{\nabla} \phi_m \cdot d\vec{x} = -\mu_0 (\phi_m(\vec{x}^+) - \phi_m(\vec{x}^-))$$

Por otra parte al cruzar la superficie de la espira de $\vec{x}^+$ a $\vec{x}^-$, el ángulo sólido varía en 4π

$$\phi_m(\vec{x}^+) - \phi_m(\vec{x}^-) = -\frac{I}{4\pi} \Delta\Omega = -I$$

por lo que será

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 I$$

que es la ley de Ampère para circuitos

De todo lo dicho anteriormente, se saca la importante conclusión de que, si existiese un monopolo magnético, con cada vuelta que diese al circuito cerrado anterior a través de la espira se ganaría una energía proporcional a la corriente de la espira, manteniéndose constante la corriente en esta.

Un monopolo, además no podría pasar a través de una barra magnética ya que quedaría atrapado en su superficie. Vemos, que la ley de Ampère, encierra misterios más profundos de la naturaleza de lo que podría suponerse por la simplicidad de su ecuación.

El potencial magnético ϕ_m es discontinuo al atravesar la superficie de una espira, y lo mismo ocurriría si tuviésemos una distribución superficial de dipolos magnéticos. Sin embargo, su gradiente en este caso es continuo al serlo $\vec{B}$.

Si definimos una densidad superficial de carga magnética ρ_{sm} , y una densidad superficial de dipolo magnético $p_{sm} = \rho_{sm}d$, formada por dos superficies de cargas magnéticas de signo opuesto separadas por una distancia infinitesimal $d = |\vec{x}^+ - \vec{x}^-|$, entonces el potencial por la ecuación de Poisson vendrá dado por

$$\phi_m(\vec{x}^+) - \phi_m(\vec{x}^-) = \int_{S^+} \frac{\rho_{sm}}{4\pi|\vec{x}^+|} dS - \int_{S^-} \frac{\rho_{sm}}{4\pi|\vec{x}^-|} dS$$

por lo que deberá ser $\rho_{sm} = I$. Por tanto, el potencial que crea una espira es equivalente matemáticamente al potencial que crearía una capa de dipolos magnéticos con una densidad superficial igual a la corriente de la espira. Obsérvese que decimos equivalente matemáticamente, lo que no supone que deban existir en la realidad dichos polos magnéticos.

Sin embargo, si aplicamos el mismo razonamiento que antes al caso del potencial eléctrico para una capa superficial de dipolos, formado por cargas eléctricas de signo opuesto $p_{se} = \rho_{se}d$, donde ρ_{se} es la densidad de carga superficial, entonces obtendremos que

$$\phi(\vec{x}^+) - \phi(\vec{x}^-) = \frac{\rho_{se}}{\epsilon_0}$$

Es decir, el potencial eléctrico es discontinuo al atravesar una capa superficial de dipolos. Sin embargo, es continuo al atravesar una densidad de carga superficial, pero su gradiente no lo es, como se puede comprobar con razonamientos similares a los anteriores.

El potencial y el campo eléctrico creado por un dipolo eléctrico $\vec{p}_e = q\vec{d}$ formado por dos cargas q de distinto signo separadas por el vector $\vec{d}$ viene dado por

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p}_e \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\vec{p}_e \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p}_e}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + \frac{3(\vec{p}_e \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \right)$$

Las discontinuidades debidas a densidades superficiales las discutiremos más adelante, ya que la cuestión sobre si son solo artificios matemáticos o tienen también una realidad física han sido objeto de detalle en varias ocasiones.

Existe un importante teorema de la electrostática que dice que una función potencial que verifica la ecuación de Laplace dentro de una región cerrada del espacio, se

puede sustituir el espacio exterior a dicha región por una distribución de cargas y dipolos distribuidos en la superficie que delimita dicha región.

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

Cuando existen medios materiales, al campo eléctrico y a la inducción magnética se le superponen los efectos de polarización dieléctrica y de magnetización. En la realidad, por $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se debe entender que son campos promediados de los producidos por los átomos y moléculas en un volumen lo suficientemente grande respecto a ellas, ya que, en los materiales hay que tener en cuenta los efectos de los dipolos eléctricos y magnéticos microscópicos.

Cuando se hacen estos promedios partiendo de las ecuaciones microscópicas se obtiene unas ecuaciones del tipo

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \langle \vec{E}_m \rangle + \langle \vec{P}_m \rangle) = \langle \rho \rangle$$

$$\vec{\nabla} \wedge \langle \vec{B}_m \rangle = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \langle \vec{M}_m \rangle + \frac{\partial \langle \vec{P}_m \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\epsilon_0 \langle \vec{E}_m \rangle)}{\partial t}$$

donde por $\langle \dots \rangle$ entendemos el promedio en un pequeño volumen de dimensiones macroscópicas.

Si ahora se define

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{E}_m \rangle \quad \vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{B}_m \rangle ,$$

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{P}_m \rangle \quad \vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{M}_m \rangle$$

y se introducen los dos nuevos vectores $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$, las anterior ecuaciones promediadas macroscópicamente se reescribirán como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

que son las ecuaciones macroscópicas formuladas por Maxwell para medios materiales.

Experimentalmente, $\vec{M}$ es la intensidad de magnetización, que mide el momento mecánico por unidad de inducción de campo magnético y de volumen, que experimenta un dipolo magnético perpendicular al campo. $\vec{P}$ es una medida de la caída de voltaje al introducir un medio dieléctrico entre las placas de un condensador.

Por razones históricas, a $\vec{H}$ se le denominó campo magnético por considerarse al principio que era la magnitud primaria. Durante mucho tiempo, hubo la controversia de cuál de los campos, $\vec{B}$ o $\vec{H}$ era el campo fundamental y cual el derivado. Vemos que a partir de la teoría microscópica, $\vec{B}$ es un campo real promedio, y $\vec{H}$ es una definición auxiliar matemática, útil para resolver las ecuaciones del electromagnetismo. La misma situación se tiene con $\vec{E}$ que es un campo real promedio, y $\vec{D}$ que es una definición matemática auxiliar.

En sentido estricto, se deben escribir las ecuaciones de Maxwell en la materia, en función de $\vec{E}$ y $\vec{B}$, que son los campos reales promediados macroscópicamente

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E} &= \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} &= (\vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}) + \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

De la tercera ecuación vemos que, por las polarizaciones moleculares o atómicas, se produce una densidad de carga ρ_m así como una corriente $\vec{J}_m$

$$\begin{aligned}\rho_m &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \vec{J}_m &= \partial \vec{P} / \partial t + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}\end{aligned}$$

Esto sugiere la posibilidad de atribuir el magnetismo a corrientes moleculares, como ya predijo Ampère. Estas corrientes son diferentes de las corrientes de cargas $\vec{J}$ a las que se suman.

Una controversia histórica fue si $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, que aparece en la tercera ecuación, es real o sólo un artificio matemático. Vimos que según la teoría microscópica $\vec{P}$ procede de un promedio de las polarizaciones moleculares, y en tanto entendamos que el campo eléctrico es un promedio macroscópico, su efecto es real, como se puede comprobar en las cargas superficiales de separación entre dos medios dieléctricos distintos que provienen del término $\vec{P} \cdot \vec{n}$.

En la cuarta ecuación vemos que, a las corrientes de cargas, se le ahora suma dos términos que actúan también como corrientes $\partial \vec{P} / \partial t + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$.

De igual forma, surgió la controversia histórica sobre su realidad y los mismos argumentos de antes son válidos. Sus efectos se pueden comprobar en las corrientes superficiales $\vec{M} \wedge \vec{n}$ que se generan entre dos materiales con distintas constantes de permitividad. Veremos en otro capítulo que, cuando un medio dieléctrico se desplaza

a velocidad constante respecto a un observador fijo, se le aparecen magnetizaciones aparentes debido a las corrientes de convección de las cargas de polarización, y polarizaciones y aparentes de magnetización que son debidas a corrientes microscópicas originadas por efectos sólo explicados por la teoría de la relatividad, pero que se manifiestan en la realidad, como en el caso de los generadores de inducción unipolar.

La última ecuación de constitución, que se conoce como Ley de Ohm, es la que relaciona la corriente de conducción con el campo eléctrico a través de la conductividad σ . Aunque esta relación de proporcionalidad fue descubierta por Ohm de forma experimental, actualmente es posible calcularla mediante la teoría cuántica de los sólidos, y su origen proviene de una compleja interacción microscópica de los electrones con la red de átomos. Sin embargo es una ley macroscópica aproximada, en cuanto valga la relación de linealidad.

Se debe tener en mente, por tanto, que las ecuaciones de Maxwell en medios materiales son sólo una aproximación y que la linealidad de las relaciones de constitución es válida en tanto los campos no sean demasiados intensos, en cuyo caso las ecuaciones de Maxwell hay que modificarlas. Sin embargo, en el vacío, fuera de medios dieléctricos y magnéticos, las ecuaciones de Maxwell son totalmente válidas si la densidad de energía es suficientemente grande, para que los efectos de las fluctuaciones cuánticas sean despreciables.

103

Como lo que queremos estudiar son los fundamentos del campo electromagnético, en los próximos capítulos analizaremos los distintos modelos para el vacío.

Consideramos que un material dieléctrico está formado por una distribución continua de dipolos con una densidad volumétrica $\vec{P}$ encerrados en un volumen finito V delimitado por una superficie S cuya normal exterior sea $\vec{n}$.

El potencial en un punto exterior al volumen se puede escribir después de algunas transformaciones como

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \\ &= \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' + \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \end{aligned}$$

Vemos que, en la superficie, $\vec{P} \cdot \vec{n}$ actúa como una densidad superficial de carga y el interior del dieléctrico como una densidad de carga $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.

Por tanto para el cálculo del potencial eléctrico o del campo eléctrico, un material dieléctrico puede ser tratado como una distribución una distribución de cargas

espacial $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ y superficial $\vec{P} \cdot \vec{n}$, o como el que crea una distribución de dipolos volumétrica $\vec{P}$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \rho_{SP} = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \overset{0}{\leftrightarrow} \quad \vec{P}$$

Cualquiera de los dos métodos lleva a los mismos resultados pero se debe diferenciar entre ellos.

Como ya hemos comentado $\vec{P}$ es una magnitud macroscópica que proviene de un promedio en volumen de los dipolos $\vec{p}$ microscópicos de origen atómico o molecular.

De igual forma, para calcular el potencial vector de un material magnético para condiciones estacionarias, con un tratamiento similar se obtiene la identidad

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}(\vec{x}') + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{x}') \wedge \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}{d^3x'} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}(\vec{x}') + \vec{\nabla} \wedge \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{x}') \wedge d\vec{S}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

Por tanto, en la superficie, $\vec{M} \wedge \vec{n}$ actúa como una densidad superficial de corriente y en el interior del material magnético $\vec{\nabla} \wedge \vec{M}$ como una densidad de corriente.

Al igual que en el caso electrostático, el cálculo del potencial magnético o del campo de inducción magnético en un material magnético puede ser tratado como una distribución una distribución de corrientes de volumen $\vec{\nabla} \wedge \vec{M}$ y superficial $\vec{M} \wedge \vec{n}$, o como el que crea una distribución de dipolos magnéticos volumétrica $\vec{M}$

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad \vec{J}_{SM} = \vec{M} \wedge \vec{n} \quad \overset{0}{\leftrightarrow} \quad \vec{M}$$

Como ya hemos comentado $\vec{M}$ es una magnitud macroscópica que tiene su origen en las corrientes de origen microscópicas.

En el caso de la magnetostática en que no hay corrientes de carga reales, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ y $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 0$, existirá como hemos comentado un potencial magnético ϕ_m tal que $\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_m$. En analogía con el caso electrostático, en este caso se puede calcular que ϕ_m y $\vec{H}$ proceden de una fuentes ficticias de cargas magnéticas de volumen y de su superficie

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad \rho_{SM} = \vec{M} \cdot \vec{n}$$

Sin embargo no debe olvidarse que estas cargas magnéticas no son reales y solo son un artificio matemático que nos da los mismos resultados en los cálculos para el campo magnético real.

Si consideraremos una corriente en un conductor lineal y un dipolo magnético, para condiciones estacionarias la anterior ecuación integral para el potencial vector adopta la expresión simplificada

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Ya vimos que, si el conductor es una espira, el primer término se reduce a una expresión similar a la del segundo término con el momento dipolar de la espira. Esto era de esperar, pues ya comentamos que, al no existir monopolos magnéticos, los campos magnéticos son producidos por dipolos magnéticos microscópicos o de corrientes, las cuales siempre se deben cerrar.

Consideremos ahora el siguiente ejemplo, que nos servirá para aclarar unos importantes conceptos sobre la realidad física del potencial vector. Es bien conocido que, en un solenoide de gran longitud, de radio r_0 con N_l espiras por unidad de longitud por las que circula una corriente I , aplicando la ley de Ampère, la inducción magnética es cero en el exterior. En el interior $\vec{B}$ es constante y dirigida según el eje z , y en exterior es nulo

$$\vec{B} = \mu_0 N_l I \vec{k} \text{ en el interior y } \vec{B} = 0 \text{ en el exterior}$$

El potencial vector en el interior del solenoide vendrá dado por

$$\vec{A} = \mu_0 N_l I (-y\vec{i} + x\vec{j})$$

que evidentemente verifica $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$.

Para calcular en el exterior se aplica el teorema de Stokes a un circuito de radio r alrededor del solenoide por el exterior

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 N_l I \pi r_0^2$$

con lo que será el potencial vector en el exterior será

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 N_l I r_0^2}{2r} (-y\vec{i} + x\vec{j})$$

Durante mucho tiempo se discutió si el potencial vector tenía un significado físico real, ya que en la fuerza de Lorentz sólo aparecen los campos de inducción magnética y el campo eléctrico y, por tanto, se suponía que los potenciales no eran más que una construcción matemática, útil solamente para resolver problemas, pero sin entidad física. Apoyaba esta suposición el hecho de que al final hay que calcular su rotacional para obtener la inducción magnética, que se suponía era la magnitud con realidad física.

Además el potencial vector está indeterminado en el gradiente de una función arbitraria. En el ejemplo anterior, en el exterior del solenoide, la inducción magnética es cero, aunque el potencial vector no es nulo. Según el electromagnetismo clásico, no podríamos ver ningún efecto físico sobre la carga y corrientes eléctricas. Sin embargo, se han hecho experimentos de interferencia de electrones haciéndolos circular por trayectorias distintas alrededor de un solenoide y se ha visto que la interferencia depende de la integral de circulación del potencial vector a lo largo de la trayectoria de los electrones. Este fenómeno conocido como efecto Aharon-Böhm, sólo tiene una explicación en la mecánica cuántica y las ecuaciones de Maxwell no pueden predecirlo. Veremos en otros capítulos que las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar de principios más generales sólo a partir del potencial eléctrico y del potencial magnético, por lo que se pueden considerar como entidades con una realidad física primaria.

Que la fuerza de Lorentz sólo se manifieste a través de un gradiente y un rotacional, es un hecho fortuito que se debe a razones, como veremos, de la relatividad y a que vivimos en un mundo de tres dimensiones espaciales. La topología de nuestro espacio condiciona como debe ser la física y también la forma de las ecuaciones de Maxwell. Otros ejemplos llamativos son que sólo en un espacio de tres dimensiones son posibles las órbitas estables y que los frentes de ondas se puedan propagar sin distorsiones lo que permite que nos pueda llegar la luz emitida por el sol.

Iremos viendo otros ejemplos de cómo la microfísica condiciona como deben ser las leyes en la macrofísica. Por ejemplo, si los potenciales vectores tuvieran influencia sobre las reacciones bioquímicas, podrían darse situaciones donde no existiera campo magnético apreciable, pero si un potencial vector, y se produjesen reacciones, lo que haría cambiar nuestros criterios de valoración.

Discontinuidades entre medios

Cuando existen dos medios materiales con distintas constantes los campos sufren discontinuidades al atravesarlos. Una ecuación del tipo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

se analiza tomando un volumen cilíndrico, de altura infinitesimal entre la superficie de separación.

Aplicando el teorema de Gauss a la anterior ecuación se ve que se debe verificar

$$(\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) \cdot \vec{n} = \rho_s$$

donde $\vec{n}$ es la normal a la superficie, ρ_s es la densidad de carga eléctrica superficial, y los superíndices (1) y (2) se refieren a los valores a ambos lados de la superficie.

La anterior ecuación también la podemos describir con la notación

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \rho_s$$

donde por subíndice n representamos la componente normal a la superficie.

Si la anterior ecuación la expresamos en función del campo eléctrico, obtendremos

$$\epsilon_0 E_n^{(2)} - \epsilon_0 E_n^{(1)} = \rho_s - (P_n^{(2)} - P_n^{(1)})$$

Vemos que la polarización dieléctrica, en la superficie de separación, actúa como una carga superficial efectiva que proviene de un término $\vec{P} \cdot \vec{n}$, que contribuye a la discontinuidad del campo eléctrico al atravesar la superficie.

La segunda ecuación cinemática de Maxwell para la electrostática $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$, que establece que la componente tangencial del campo eléctrico debe ser continua a través de la superficie

$$E_t^{(2)} - E_t^{(1)} = 0$$

Todo esto establece también un método para medir las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{D}$.

Si en un medio dieléctrico consideramos una cavidad alargada y estrecha con una forma de aguja en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$, entonces el campo eléctrico fuera y dentro de la cavidad es el mismo.

$$\vec{E}_{fuera} = \vec{E}_{dentro} = \vec{E}_\parallel$$

Si en cambio definimos una cavidad de forma cilíndrica pero de altura muy pequeña cuya base sea perpendicular a la dirección de $\vec{D}$, entonces el vector de desplazamiento es el mismo dentro y fuera de la cavidad

$$\vec{D}_{fuera} = \vec{D}_{dentro} = \vec{D}_\perp$$

En el caso del magnetismo, una ecuación que contenga términos del tipo

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

se puede analizar como varían los campos al atravesar la superficie, tomando un circuito rectangular de anchura infinitesimal que atraviese la superficie perpendicularmente a esta. Aplicando el teorema de Stokes, se obtiene

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \vec{j}_s$$

Los significados del campo electromagnético

donde $\vec{J}_{es}$ es la corriente eléctrica superficial.

La anterior ecuación también se escribe con la notación

$$H_t^{(2)} - H_t^{(1)} = J_s$$

donde por el subíndice t representamos la componente tangencial a la superficie.

Si la anterior ecuación la representamos en función del vector de inducción magnética, obtenemos

$$\frac{B_t^{(2)}}{\mu_0} - \frac{B_t^{(1)}}{\mu_0} = J_s + (M_t^{(2)} - M_t^{(1)})$$

Vemos que la magnetización en la superficie de separación actúa como una carga superficial efectiva que proviene de un término $M \wedge \vec{n}$, que contribuye a la discontinuidad del campo eléctrico al atravesar la superficie.

Como la divergencia de $\vec{B}$ es cero, su componente normal será continua

$$B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0$$

De forma análoga a la electrostática, se pueden definir las magnitudes de $\vec{B}$ y $\vec{H}$ mediante los campos en pequeñas cavidades:

Si en un medio magnético, consideramos una cavidad alargada y estrecha con una forma de aguja en la dirección del campo magnético $\vec{H}$, entonces el campo eléctrico fuera y dentro de la cavidad es el mismo:

$$\vec{H}_{fuera} = \vec{H}_{dentro} = \vec{H}_{\parallel}$$

Si en cambio para una cavidad de forma cilíndrica pero con altura muy pequeña cuya base sea perpendicular a la dirección de $\vec{B}$, entonces el campo de inducción magnética es el mismo dentro y fuera de la cavidad

$$\vec{B}_{fuera} = \vec{B}_{dentro} = \vec{B}_{\perp}$$

En el caso de campos dependientes del tiempo debido a la ecuación de la continuidad de la carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

en la interfase de separación entre dos medios se debe cumplir la condición

$$J_n^{(2)} - J_n^{(1)} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

Dentro de un conductor perfecto es $\vec{E} \equiv 0$ y por tanto $\vec{E}_t = 0$ en el exterior. Además, en el interior del conductor, al ser $\partial \vec{B} / \partial t = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \equiv 0$, entonces $\vec{B}$ y $\vec{H}$ serán constantes y por tanto $\vec{J}$ será también independiente del tiempo y deberá fluir en una dirección paralela a la interfase.

De las condiciones de continuidad de la componente normal de $\vec{B}$, y de que la discontinuidad en la componente de $\vec{H}$ debe ser igual a la corriente superficial, se deduce que no puede haber nunca un campo variable dentro de un conductor perfecto.

Todo esto da lugar a lo que se conoce como efecto pelicular o skin, en que la corriente fluye por la superficie impidiendo que el campo penetre dentro del conductor. Esta es la razón por la que se vacía el interior de un conductor grueso, ya que en el transporte de corriente alterna esa zona prácticamente no contribuye a la conducción de corriente.

Otra forma de optimizar la conducción eléctrica es hacer el conductor compuesto por múltiples filamentos.

En otro capítulo, veremos que, en el caso de materiales en movimiento, las condiciones de continuidad debido a efectos relativistas son mucho más complejas y que aparecen nuevos efectos como magnetizaciones procedentes de polarizaciones y polarizaciones originadas por magnetizaciones que son efectos puramente relativistas, pero que se observan en los generadores de inducción unipolar.

Principios de conservación

Según la teoría de Lorentz, los campos actúan mediante fuerzas sobre la materia en forma de cargas eléctricas, y corrientes que son cargas en movimiento. A partir de la fuerza de Lorentz se puede calcular el trabajo W hecho por el campo electromagnético sobre la materia, que viene dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_0^l \left(\int_V \vec{f}_L d^3x \right) \cdot d\vec{l} = \int_0^l \left(\int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}) d^3x \right) \cdot d\vec{l} = \int_0^l \left(\int_V (\rho \vec{E}) d^3x \right) \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt \\ &= \int_V \left(\int_0^t \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dt \right) d^3x = \int_V \left(\int_0^t \vec{J} \cdot \vec{E} dt \right) d^3x = \int_V d^3x \int_0^t \rho_e \vec{v} \cdot \vec{E} dt \end{aligned}$$

Haciendo uso de la segunda y tercera ecuación de Maxwell, obtenemos

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que introducida en la anterior ecuación nos da

$$W = - \int_0^t dt \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S} - \int_V d^3x \int_0^D \vec{E} \cdot d\vec{D} - \int_V d^3x \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

La anterior ecuación es una ecuación de conservación, que se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} W &= - \int_0^t dt \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S} - \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d^3x \\ &= - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) d^3x - \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d^3x \end{aligned}$$

que nos dice, que el trabajo realizado por el campo sobre la materia dentro en un volumen dado, se invierte en la creación de una energía de campo electromagnético, más un término que nos indica la energía que sale por la superficie de dicho volumen.

En forma diferencial, obtenemos una ecuación de conservación local de la energía

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

Si se define habitualmente las magnitudes de energía

$$w_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad \text{Densidad de energía del campo}$$

$$\vec{S}_c \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} \wedge \vec{H} \quad \text{Vector Poynting = flujo de energía}$$

El que la anterior ecuación de conservación de energía sea local y no global, veremos más adelante, que se debe a la invarianza relativista de las ecuaciones de Maxwell.

El término $\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2$ es la energía por unidad de volumen y de tiempo que cede el campo electromagnético a la materia y que se invierte en disipación de calor por efecto Joule en los conductores.

Evidentemente su carácter disipativo de energía solo tiene sentido como un promedio macroscópico, ya que la conductividad depende de los fenómenos microscópicos de cómo se mueven las cargas en los conductores.

Haciendo un análisis similar en función de los potenciales, obtendríamos

$$w_c = \frac{1}{2} (\phi \rho + \vec{J} \cdot \vec{A})$$

Esta ecuación es importante y la utilizaremos ampliamente en otros capítulos, ya que nos define como la materia (cargas y corrientes) interacciona con el campo electromagnético.

Un hecho a observar, es que la ecuación de la conservación de la energía se ha obtenido empleando solo el segundo par de ecuaciones dinámicas de Maxwell, y por tanto, está contenido implícitamente en ellas.

Es también de interés calcular el momento del campo electromagnético. El trabajo que realiza el campo electromagnético sobre la materia en forma de cargas y corrientes se tiene que traducir en una variación de la energía mecánica de las partículas cargadas

$$\frac{dE_m}{dt} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x$$

Partiendo de la fuerza de Lorentz, que define la interacción del campo electromagnético con la materia, obtenemos la variación del momento de las cargas

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \int_V \vec{f}_L d^3x = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d^3x$$

Utilizando la tercera y cuarta ecuación de Maxwell para despejar ρ y $\vec{j}$, después de hacer algunas transformaciones vectoriales se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_m}{dt} &= -\frac{d}{dt} \int_V \vec{D} \wedge \vec{B} d^3x + \int_V \frac{\partial T_M^{ij}}{\partial x^i} d^3x = \\ &= -\frac{d}{dt} \int_V \vec{D} \wedge \vec{B} d^3x + \int_S T_M^{ij} n_j dS \end{aligned}$$

donde T_M^{ij} es el tensor de Maxwell

$$T_M^{ij} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{B} \cdot \vec{H})$$

y $\vec{n}$ es la normal exterior de la superficie S que encierra la materia.

El tensor de Maxwell actúa como una fuerza sobre la superficie. Tomando un volumen suficientemente grande, donde el tensor se anule sobre la superficie, la anterior ecuación nos dice que la suma del momento lineal total de la materia y del campo electromagnético es constante.

La densidad de momento $\vec{p}_c$ (momento por unidad de volumen) del campo electromagnético viene dada por

$$\vec{p}_c = \vec{D} \wedge \vec{B}$$

La conservación del momento lineal total se puede escribir en forma de una ecuación de continuidad local

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_m + \vec{p}_v)_i = \frac{\partial T_M^{ij}}{\partial x^j}$$

donde $\vec{p}_m$ es la densidad de momento de la materia.

Hay, por tanto, un intercambio de energía y momento entre el campo electromagnético y la materia de forma que la cantidad total se mantiene constante.

Veremos, más adelante, que esto se debe a la invarianza de las ecuaciones Maxwell ante traslaciones transformaciones de Poincaré.

Para el vacío, si comparamos la densidad de momento con el vector Poynting del flujo de energía, vemos que se verifica

$$\vec{p}_c = \frac{1}{c^2} \vec{S}_c$$

Por tanto, el vector Poynting para el campo electromagnético tiene una doble función como densidad de flujo de energía y como densidad de momento lineal, con una constante de proporcionalidad que es la velocidad de la luz al cuadrado. Veremos mas adelante que esto es debido a un efecto relativista causado por la equivalencia entre energía y momento.

Todo lo anterior también nos indica que una región finita del espacio en un campo electromagnético dependiente del tiempo esta sometida a una fuerza de volumen incluso cuando no hay cargas ni corrientes dentro de ella dada por

$$\vec{F}_c = \int_V \vec{f}_c d^3x = \frac{d}{dt} \int_V \vec{D} \wedge \vec{B} d^3x = \int_S T_M^{ij} n_j dS$$

Un hecho destacable es que el momento del campo electromagnético proviene del término de la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell.

Que el campo electromagnético transporte momento tiene como consecuencia que en el vacío si un campo de radiación electromagnética incide sobre una superficie ejercerá una presión

$$P_r = c p_{ec} = w_c$$

Aunque la ecuación de conservación de la energía y del momento es correcta, se plantean sin embargo paradojas cuando se trata de ubicar la energía del campo o el camino de su circulación si no se aplica correctamente el vector Poynting.

Las integrales para el cálculo de la energía debe extenderse al infinito, donde en general tiende a anularse, excepto en algunos casos, como los de radiación por aceleración de cargas, en que su integral de superficie se aproxima a una constante. El vector Poynting en estos casos juega un papel importante.

A la densidad de momento del campo $\vec{p}_c$ en la literatura técnica es frecuente designarlo por $\vec{g}$, el momento total $\vec{P}_c$ por $\vec{G}$, y a $\vec{S}_c$ simplemente por $\vec{S}$

$$\vec{G} = \int_{V^\infty} \vec{g} d^3\vec{x}$$

Para calcular el momento angular del campo electromagnético se sigue un proceso similar. Partiendo de la ecuación de la fuerza de Lorentz que actúa sobre las cargas se obtiene

$$\frac{d\vec{L}_m}{dt} = \int_V \vec{x} \wedge \vec{f}_L d^3\vec{x} = \int_V \vec{x} \wedge (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d^3x$$

Aplicando los resultados que obtuvimos para el momento, llegamos a que la densidad de momento a angular del campo electromagnético viene dada por

$$\vec{l}_c = \vec{x} \wedge \vec{p}_c$$

y la ecuación de conservación del momento angular total de la materia más el campo electromagnético toma la expresión

$$\frac{d}{dt} \int_V (\vec{l}_m + \vec{l}_c) d^3x = \int_V \frac{\partial L^{ij}}{\partial x^j} d^3x = \int_S L^{ij} n_j dS$$

o en forma de ecuación de conservación

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{l}_m + \vec{l}_c)^i = \frac{\partial L^{ij}}{\partial x^j}$$

donde

$$L^{ij} = \varepsilon_{imk} L^{kj} x^m = \varepsilon_{imk} M^{kjm}$$

siendo ε_{jmk} el tensor totalmente antisimétrico de orden tres.

Hay, por tanto, un intercambio de momento angular entre el campo electromagnético y la materia de forma que la cantidad total se mantiene constante.

Veremos más adelante, que esto se debe a las propiedades de invarianza de las ecuaciones Maxwell ante rotaciones en el espacio y rotaciones relativistas en el plano x, t , y a que el tensor de Maxwell es simétrico.

Otro efecto relativista, es la conservación del llamado momento angular de espín clásico del campo electromagnético, cuya densidad de momento angular viene dada por

$$\vec{l}_{spin} = \vec{E} \wedge \vec{A}$$

Veremos que existe una justificación cuántica para su existencia.

Las ecuaciones del campo electromagnético fueron un gran logro de Maxwell y tienen un gran poder de predicción, pero no todas las propiedades del campo electromagnético se deducen fácilmente de ellas.

Hay otras formulaciones relativistas, como la de Minkowsky o la covariante, que predicen nuevos fenómenos del campo electromagnético y aportan una justificación a la forma que adoptan algunas de las ecuaciones de Maxwell.

Energía y fuerzas

Una vez conocido la distribución de energía en un sistema es inmediato el cálculo de las fuerzas que se producen entre las distintas partes.

Si W_c es la energía total del campo electromagnético y W es el trabajo para mantener la distribución de cargas y corrientes en equilibrio, deberá cumplirse el balance de energía

$$\frac{d}{dt}(W_{em} + W) = 0$$

Po tanto, ante un desplazamiento virtual $d\vec{x}$ de alguna partes constituyentes del sistema se producirá una fuerza $\vec{F}$ dada por

$$\vec{F} \cdot d\vec{x} = dW = -dW_c \downarrow_{Cte}$$

o lo que lo mismo

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W_c \downarrow_{Cte}$$

donde $\downarrow_{Cte}$ significa que se mantienen constantes las corrientes y las cargas.

Si en vez de un desplazamiento virtual fuese un giro angular, tendríamos que el momento de equilibrio sería

$$T_\theta = -\frac{\partial}{\partial \theta} W_c \downarrow_{Cte}$$

Muchas veces conviene diferenciar en $W_c = W_i + W_a$ entre la energía W_i de interacción entre distintas partes separadas constituyentes de un sistema, y la autoenergía W_a que se requiere para la formación en equilibrio de cada una de las partes del sistema.

Si la autoenergía de las distintas partes del sistema es independiente de la configuración relativa que formen las distintas partes, entonces el trabajo virtual para una configuración dada de equilibrio al desplazar alguna de las partes es igual al incremento de la energía de interacción y será por tanto

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W_i \downarrow_{cte}$$

A veces lo que se mantiene constante no son las cargas y corrientes sino algún otro parámetro físico distinto, por lo que las anteriores ecuaciones se pueden modificar conociendo cual es la correlación entre los parámetros.

Lo anterior tiene una aplicación inmediata a algunos casos simples. La fuerza y el momento que actúa sobre un dipolo $\vec{p}$ en un campo externo $\vec{E}$ vendrá dada por

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla} W_i \downarrow_{\vec{p}=cte} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \\ T_\theta &= -\frac{\partial}{\partial \theta} W_i \downarrow_{\vec{p}=cte} = \vec{p} \wedge \vec{E}\end{aligned}$$

De igual forma para un dipolo magnético $\vec{m}$ en un campo de inducción magnética $\vec{B}$ se tiene

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla} W_i \downarrow_{\vec{m}=cte} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \\ \vec{M} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} W_i \downarrow_{\vec{m}=cte} = \vec{m} \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

115

Los conceptos de fuerza e inducción permiten también hacer una distinción intuitiva entre los campos $\vec{E}, \vec{H}$ y $\vec{D}, \vec{B}$ por sus efectos.

Por la ley de Coulomb, un campo eléctrico $\vec{E}$ siempre produce una fuerza sobre una carga, por lo que siempre es posible comparar un campo con otro mediante los efectos de sus fuerzas.

Por la ley de Ampère, un campo magnético $\vec{H}$ constante creado en el interior un solenoide se puede medir por el momento que crea sobre un dipolo magnético o una aguja imantada, por lo que siempre es posible comparar un campo con otro mediante los efectos de sus momentos.

Por las ecuaciones dinámicas de Maxwell un campo $\vec{D}$ externo constante es proporcional a la carga máxima inducida en la superficie de la lámina de un condensador al rotar en un campo eléctrico.

Por la ley de Faraday un campo magnético $\vec{B}$ externo constante es proporcional al voltaje máximo inducido en una espira conductora al rotar en dicho campo.

Los significados del campo electromagnético

Estas definiciones experimentales, junto con las que se dieron para la continuidad de los campos en cavidades de materiales, han servido históricamente para justificar las definiciones de las magnitudes del campo electromagnético y muchos autores a partir de ellas han construido toda teoría del electromagnetismo clásico.

En un conjunto de conductores, en un desplazamiento virtual manteniendo el equilibrio entonces se debe tener en cuenta que el trabajo W_b efectuado por las de baterías se invierte en efecto Joule $dW_j = -dW_b$ por lo que se compensan y no aparecen en el balance de energía si se mantienen las corrientes constantes. Solo en el caso de que las corrientes no sean constantes se deben considerar en el balance

$$dW_i + dW + dW_j = 0$$

De la simetría del movimiento relativo se puede sacar una justificación sencilla del origen de la ley de Faraday.

Supongamos que tenemos un campo $\vec{B}$ constante. Una carga q que se mueva con una velocidad $\vec{v}$ sufrirá una fuerza

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Si ahora el campo $\vec{B}$ se desplaza con velocidad $-\vec{v}$ y la carga q esta fija, se obtendrá una fuerza

$$\vec{F}_m = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Como en este caso la carga q está fija y las dos anteriores fuerzas tienen que ser iguales por la equivalencia relativa de los movimientos, debe existir en este último caso un campo eléctrico equivalente

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Esto se puede interpretar como el origen del efecto Faraday, y muestra la equivalencia de la electricidad y el magnetismo. Los movimientos inerciales relativos establecen que, el campo eléctrico y el magnético se transforman entre ellos según relaciones bien establecidas.

Simetrías en las ecuaciones de Maxwell

Un hecho importante de las ecuaciones de Maxwell, es que en una inversión del tiempo, si cambiamos t por $-t$, deben cambiar $\vec{B}$ por $-\vec{B}$ y $\vec{M}$ por $-\vec{M}$ para que las ecuaciones sean invariantes. Evidentemente, por la Ley de Ampère, vemos que $\vec{B}$ y $\vec{M}$ invierten su signo cuando las corrientes invierten de sentido.

Sin embargo si se introduce la Ley de Ohm, vemos que el trabajo hecho por el campo electromagnético sobre las cargas por unidad de volumen y tiempo es $\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2$, por lo que las ecuaciones no son ya invariantes frente a una inversión temporal y tienen un carácter disipativo, ya que $\sigma \vec{E}^2$ es la energía calórica disipada por efecto Joule. Por tanto, la Ley de Ohm destruye la inversión del tiempo y marca una flecha del tiempo relacionado con el crecimiento de la entropía.

Todo esto se puede resumir diciendo que

$$\vec{A}(\vec{x}, -t) = -\vec{A}(\vec{x}, t) \quad \text{y} \quad \phi(\vec{x}, -t) = \phi(\vec{x}, t)$$

Otro hecho observable es que, si hacemos una inversión espacial cambiando $\vec{x}$ por $-\vec{x}$, las ecuaciones de Maxwell son invariantes si todas las magnitudes cambian su signo excepto $\vec{B}$ y $\vec{M}$. Otra vez, por la ley de Ampère nos confirma que ambos vectores son polares y no se invierten ante una inversión de ejes. Por tanto será

$$\vec{A}(-\vec{x}, t) = -\vec{A}(\vec{x}, t) \quad \text{y} \quad \phi(-\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t)$$

y $\vec{A}$ será un vector polar.

Esto también puede verse a partir de la fuerza de Lorentz

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right)$$

que debe ser un vector polar observable, y por tanto

$$\vec{F}_L(\vec{x}, -t) = \vec{F}_L(\vec{x}, t) \quad \text{y} \quad \vec{F}_L(-\vec{x}, t) = -\vec{F}_L(\vec{x}, t)$$

En ausencia de cargas y corrientes de conducción, las ecuaciones de Maxwell para la magnetostática y la electrostática también son invariantes ante el cambio

$$(\vec{B}, \vec{H}, -\vec{M}) \leftrightarrow (\vec{E}, \vec{D}, \vec{P})$$

por lo que las soluciones para problemas con sólo dieléctricos o sólo magnetizaciones son análogas con el anterior cambio.

Veremos que todas estas propiedades están relacionadas con la teoría de la relatividad que unifica el campo eléctrico y magnético en una sola identidad dual.

Unicidad y complitud de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son 8 ecuaciones con 12 incógnitas ($\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$). Las relaciones de constitución nos dan otras 6 ecuaciones. Por tanto, tenemos un total de 14 ecuaciones con 12 incógnitas.

Sin embargo, no todas las variables son independientes, ya que como hemos visto, las ecuaciones de Maxwell contienen relaciones implícitas como las ecuaciones de la conservación de la carga y la energía. Si el mismo análisis se hace con los potenciales, ya que ϕ y $\vec{A}$ obedecen a ecuaciones del tipo de ondas, lo que nos da 4 ecuaciones con 4 incógnitas.

Tras ello se esconde el teorema de Helmholtz que nos dice que todo campo vectorial está determinado por su divergencia y su rotacional, lo que nos da 4 ecuaciones para 3 incógnitas. Estas discrepancias provienen de que no son aplicables los teoremas de unicidad del álgebra lineal a las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden como las ecuaciones diferenciales.

Siguiendo a Zhou, un campo electromagnético está unívocamente determinado en una región V limitada por una superficie S para todo tiempo $t > t_0$ por las condiciones de los valores del campo eléctrico y magnético en V , y los valores tangenciales y normales de las componentes del campo vectorial eléctrico y magnético en la frontera S de V para todo $t \geq t_0$.

Las ecuaciones de Maxwell tienen una única solución con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \vec{H}) & \vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{E}_S(\vec{x}, t) \text{ en } \vec{x} \in S_E \text{ } t \geq t_0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \vec{E}) + \vec{j} & \vec{H}(\vec{x}, t) &= \vec{H}_S(\vec{x}, t) \text{ en } \vec{x} \in S_H \text{ } t \geq t_0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) &= 0\end{aligned}$$

Donde S_E es una determinada zona de la superficie S , y S_H es la zona complementaria en S , de forma que $S_E \cup S_H = S$

La demostración se hace por el principio de contradicción. Supongamos que hubiera dos soluciones distintas $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ y $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$. Llamemos

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \\ \vec{h} &= \vec{H}_2 - \vec{H}_1\end{aligned}$$

Restando las ecuaciones de Maxwell, tenemos entonces

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{e} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \vec{h}) & \vec{e}(\vec{x}, t) &= 0 \text{ en } \vec{x} \in S_E \text{ } t \geq t_0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{h} &= \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \vec{e}) & \vec{h}(\vec{x}, t) &= 0 \text{ en } \vec{x} \in S_H \text{ } t \geq t_0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{e}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{h}) &= 0\end{aligned}$$

Pueden suceder entonces varios casos

$$\begin{aligned}\vec{e} &\equiv 0 \text{ y } \vec{h} \neq 0 \\ \vec{e} &\neq 0 \text{ y } \vec{h} \equiv 0 \\ \vec{e} &\neq 0 \text{ y } \vec{h} \neq 0\end{aligned}$$

Supongamos el primer caso. Entonces sería

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{h} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{h}) &= 0 \\ \vec{h} &= 0 \text{ en } \vec{x} \in S_H\end{aligned}$$

De la independencia de las componente tangente y normal de $\vec{h}$ en la superficie S_H podemos reescribir la condición de contorno como

$$\begin{aligned}\vec{n} \wedge \vec{h} &= 0 \text{ en } \vec{x} \in S_H \\ \vec{n} \cdot \vec{h} &= 0 \text{ en } \vec{x} \in S_H\end{aligned}$$

donde $\vec{n}$ es la normal a la superficie S de contorno. Al ser nulo el rotacional de $\vec{h}$ podemos escribir

$$\vec{h} \equiv -\vec{\nabla} \phi_{\vec{h}}$$

Las ecuaciones para $\vec{h}$ se reescribirán entonces de la forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \phi_{\vec{h}}) &= 0 \text{ en } \vec{x} \in V \\ \vec{n} \cdot (\mu \vec{\nabla} \phi_{\vec{h}}) &= 0 \text{ en } \vec{x} \in S_H\end{aligned}$$

De la relación

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi_{\vec{h}} \mu \vec{\nabla} \phi_{\vec{h}}) \equiv \mu (\vec{\nabla} \phi_{\vec{h}})^2$$

se obtiene la siguiente igualdad después de aplicar el teorema de Gauss

$$\int_V \mu (\vec{\nabla} \phi_{\vec{h}})^2 d^3x = \int_S \mu \phi_{\vec{h}} \vec{\nabla} \phi_{\vec{h}} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_E} \mu \phi_{\vec{h}} \vec{\nabla} \phi_{\vec{h}} \cdot \vec{n} dS$$

Si $S_H \equiv S$, será entonces

$$\int_V \mu (\vec{\nabla} \phi_{\vec{h}})^2 d^3x \equiv 0$$

Como es $\mu > 0$, y la primera integral es siempre mayor o igual que cero, debe ser entonces $\vec{\nabla} \phi_{\vec{h}} \equiv 0$, y por tanto $\vec{h} \equiv 0$ en V , en contradicción con la hipótesis inicial, por lo que en este caso la solución debe ser única en el interior de V .

El segundo caso se demuestra de igual forma. Si fuese $\vec{e} \neq 0$ y $\vec{h} \equiv 0$, las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{e} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{e}) &= 0 \\ \vec{e} &= 0 \text{ en } \vec{x} \in S\end{aligned}$$

Si $S_E \equiv S$, siguiendo el mismo razonamiento que para el caso primero, se concluye que debe ser $\vec{e} \equiv 0$, y por tanto, la solución es única.

Con el tercer caso $\vec{e} \neq 0$ y $\vec{h} \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{e} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \vec{h}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{h} &= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{e})\end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente la primera ecuación por $\vec{h}$, la segunda por $\vec{e}$ y restándolas obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{e} \wedge \vec{h}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{h}^2 + \varepsilon \vec{e}^2)$$

Integrando entre $t = 0$ y t obtenemos

$$\int_0^t dt \int_S (\vec{e} \wedge \vec{h}) \cdot \vec{n} dS + \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon \vec{e}^2 + \mu \vec{h}^2) d^3x = 0$$

Será $(\vec{e} \wedge \vec{h}) \cdot \vec{n} \equiv 0$ si $\vec{n} \wedge \vec{e} \equiv 0$ en alguna zona de la superficie S_E y $\vec{n} \wedge \vec{h} \equiv 0$ en la parte complementaria S_H , con lo que será entonces

$$\int_V (\varepsilon \vec{e}^2 + \mu \vec{h}^2) d^3x \equiv 0$$

Como ε y μ son positivos, el integrado será siempre positivo, por lo que deberá ser $\vec{e} \equiv 0$ y $\vec{h} \equiv 0$, y la solución deberá ser única en el interior de V .

El caso de la electrostática y magnetostática (ecuaciones independientes del tiempo) el campo eléctrico y magnético se desacopla, por lo que la demostración de la unicidad requiere un tratamiento distinto.

En electrostática las ecuaciones para el campo eléctrico son

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho$$

Aplicando razonamientos similares a los anteriores, para que exista unicidad en la solución, deberán verificarse las condiciones de contorno

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_s(\vec{x}) \quad \text{y} \quad \vec{n} \wedge \vec{E}_s(\vec{x}) = 0 \quad \text{en} \quad \vec{x} \in S$$

En magnetostática las ecuaciones para el campo magnético vienen dadas por

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) = 0$$

y las condiciones para que exista unicidad son

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{H}_s(\vec{x}) \quad \text{y} \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_s(\vec{x}) = 0 \quad \text{en} \quad \vec{x} \in S$$

Teorema de Helmholtz. Componentes longitudinales y transversales de un campo vectorial

Existe un importante teorema del análisis vectorial que dice que todo campo vectorial está unívocamente determinado si se conocen su divergencia y su rotacional, para unas adecuadas condiciones de contorno.

Si $\vec{V}$ es un campo vectorial que se anula en el infinito, entonces se puede escribir de la forma

$$\vec{V} = \vec{V}_L + \vec{V}_T = -\vec{\nabla} \phi_{\vec{V}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\vec{V}}$$

donde $\vec{V}_L = -\vec{\nabla} \phi_{\vec{V}}$ es la denominada componente longitudinal que verifica $\text{rot } \vec{V}_L \equiv 0$, y $\vec{V}_T = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\vec{V}}$ es la componente transversal para la que $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_T \equiv 0$

A $\phi_{\vec{V}}$ se le denomina potencial escalar, y a $\vec{A}_{\vec{V}}$ potencial vector del campo $\vec{V}$.

Evidentemente se verificará que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\vec{V}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\vec{V}} = -\nabla^2 \phi_{\vec{V}} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{V} &= -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi_{\vec{V}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\vec{V}} = -\nabla^2 \vec{A}_{\vec{V}} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\vec{V}} = -\nabla^2 \vec{A}_{\vec{V}}\end{aligned}$$

Como $\vec{A}_{\vec{V}}$ está indeterminado en el gradiente de una función, podemos imponer la condición auxiliar de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\vec{V}} = 0$.

Se define

$$\vec{H}(\vec{x}) = \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

donde por V_{∞} se entiende que la integral de volumen se extiende a todo el espacio.

Teniendo en cuenta la identidad

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

donde $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ es la función delta de Dirac, que verifica

$$\int_{V_{\infty}} \delta(\vec{x} - \vec{x}') V(\vec{x}') d^3x' = V(\vec{x}) \quad \text{y} \quad \int_{V_{\infty}} \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' = 1$$

se cumplirá entonces

$$\nabla^2 \vec{H} = -\vec{V}$$

Invirtiendo el proceso

$$\vec{V} = -\nabla^2 \vec{H} = -\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_{\vec{V}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\vec{V}}$$

por lo que debe ser

$$\begin{aligned}\phi_{\vec{V}} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{H} \\ \vec{A}_{\vec{V}} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{H}\end{aligned}$$

De la definición de $\vec{H}$, obtenemos integrando por partes y aplicando el teorema de Gauss

$$\begin{aligned}\phi_{\vec{V}}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{x}) = - \int_{V_{\infty}} \vec{V}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\ &= - \oint_{S_{\infty}} \frac{\vec{V}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}'}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int_{V_{\infty}} \frac{\nabla' \cdot \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \int_{V_{\infty}} \frac{\nabla' \cdot \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'\end{aligned}$$

Se ha tenido en cuenta que la integral en el infinito se anula, ya que suponemos que el campo en el infinito es nulo.

Por $\vec{\nabla}$ y $\vec{\nabla} \wedge$ se quiere indicar que los operadores actúan sobre la variable $\vec{x}$.

A partir de la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \wedge \vec{bc} = \vec{c} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{F} - \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{c}$$

donde $\vec{c}$ es un vector arbitrario constante. Aplicando la anterior igualdad, se obtiene

$$\vec{c} \cdot \int \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d^3x = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \wedge \vec{c} d^3x = \oint \vec{F} \wedge \vec{c} \cdot d\vec{S} = \vec{c} \cdot \oint \vec{F} \wedge d\vec{S}$$

y como $\vec{c}$ es arbitrario será

$$\int \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{x}) d^3x = \oint \vec{F}(\vec{x}) \wedge d\vec{S}$$

Aplicando esta identidad podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\vec{V}} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \int_{V_{\infty}} \vec{\nabla}(\vec{x}) \wedge \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\ &= \int_{V_{\infty}} \vec{\nabla}(\vec{x}) \wedge \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' - \int_{V'} \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d^3x' \\ \vec{A}_{\vec{V}} &= \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \oint_{S_{\infty}} \frac{\vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \wedge d\vec{S}' = \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \end{aligned}$$

donde las integrales de superficie se anulan en el infinito.

Por tanto, el Teorema de Helmholtz nos dice que, todo campo vectorial $\vec{V}$ que se anula en el infinito, se puede escribir de la forma

$$\vec{V} = -\vec{\nabla} \phi_{\vec{V}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\vec{V}}$$

siendo

$$\phi_{\vec{V}}(\vec{x}) = \int_{V_{\infty}} \frac{\nabla' \cdot \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

$$\vec{A}_{\vec{V}}(\vec{x}) = \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{\nabla}' \wedge \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Hemos hecho esta larga demostración por su importancia, ya que nos permite resolver la ecuación de Poisson para los potenciales en situaciones estacionarias.

Este teorema es fácilmente generalizable para situaciones dependientes del tiempo, para obtener los potenciales retardados, como veremos más adelante.

Existen unas importantes relaciones de ortogonalidad entre las componentes longitudinales y transversales.

Si $\vec{V}$ y $\vec{W}$ son dos campos vectoriales que se anulan en el infinito

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V}_L + \vec{V}_T \\ \vec{W} &= \vec{W}_L + \vec{W}_T\end{aligned}$$

entonces, sus componentes longitudinales y transversales verificarán las relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned}\int \vec{V}_L \cdot \vec{W}_T &= \int \vec{V}_T \cdot \vec{W}_L \equiv 0 \\ \int \vec{V} \cdot \vec{W} &= \int \vec{V}_L \cdot \vec{W}_L + \int \vec{V}_T \cdot \vec{W}_T\end{aligned}$$

En el caso de cargas puntuales, las ecuaciones anteriores toman una forma más simple. Escribiendo las fuentes en función de la delta de Dirac, tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) &= q\delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= q_r \vec{v}(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))\end{aligned}$$

donde $\vec{x}_r(t)$ es la trayectoria de la partícula con una carga q_r , $\vec{v}_r(t) = d\vec{x}_r/dt$ y su velocidad. Se verificará entonces y

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) &= q_r \vec{v}_r(t) \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{j}(\vec{x}, t) &= q_r \vec{\nabla} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \wedge \vec{v}_r(t)\end{aligned}$$

y los potenciales de Helmholtz toman en este caso las siguientes expresiones después de hacer una integración por partes

$$\begin{aligned}\phi_j(\vec{x}) &= \frac{q_r}{4\pi} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_r(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_r(t)|^3} \cdot \vec{v}_r(t) \\ \vec{A}_j(\vec{x}) &= \frac{q_r}{4\pi} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_r(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_r(t)|^3} \wedge \vec{v}_r(t)\end{aligned}$$

Teorema de Poisson

El teorema de Poisson establece que todo campo vectorial $\vec{V}$ regular en el infinito admita la forma integral

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{\nabla}' \left(\nabla' \cdot \vec{V}(\vec{x}') \right) - \vec{\nabla}' \wedge \left(\vec{\nabla}' \wedge \vec{V}(\vec{x}') \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

El teorema de Poisson en condiciones estacionarias es equivalente al de Helmholtz, ya que utilizando transformaciones vectoriales similares a las empleadas anteriormente se llega a la expresión

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \int_{V_{\infty}} \frac{\nabla' \cdot \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \vec{\nabla} \wedge \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{\nabla}' \wedge \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

En ambos teoremas vemos que cualquier campo vectorial regular viene definido por su divergencia y su rotacional, y la utilización de uno u otro teorema es mas una bien cuestión de conveniencia según su aplicación.

En el capítulo de teorías de la causalidad veremos cómo se modifica el teorema de Poisson para considerar campos dependientes del tiempo.

125

Potenciales dependientes del tiempo

El campo electromagnético en función de los potenciales hemos visto que vienen dados por

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Si se toma el rotacional en las ecuaciones dinámicas de Maxwell, se obtiene para los potenciales las ecuaciones de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \right) \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Los potenciales están indeterminados, ya que el campo electromagnético queda inalterado por el cambio

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Si Λ es una solución de la ecuación de ondas inhomogénea

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

entonces se cumplirá el gauge de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \quad \text{Gauge de Lorentz}$$

y los potenciales verificarán entonces las ecuaciones inhomogéneas

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

habiéndose omitido la prima en los nuevos potenciales transformados

La solución integral para estas ecuaciones veremos que más adelante que viene dada por

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \end{aligned}$$

Si se elige Λ de forma que se verifique el gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{Gauge de Coulomb}$$

los potenciales verifican entonces las ecuaciones de ondas

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Vemos que en este caso, el potencial eléctrico ϕ es idéntico a potencial electrostático estacionario instantáneo.

La ecuación del potencial vector se puede separar en dos componentes longitudinal y transversal

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\right) \vec{A}_T = -\mu_0 \vec{J}_T$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}_L$$

En el vacío donde no existes fuentes de cargas será $\phi = 0$, y en este caso se tiene el gauge de radiación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \phi = 0 \quad \text{Gauge de radiación}$$

y los potenciales verifican la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\right) \vec{A}_T = -\mu_0 \vec{J}_T$$

$$\vec{A}_L = 0$$

Componentes longitudinales y transversales de las ecuaciones vectoriales de Maxwell

Los teoremas de Helmholtz y Poisson permiten descomponer las ecuaciones de Maxwell en sus componentes longitudinales y transversales.

Las ecuaciones cinemáticas adoptan la forma

$$\vec{B}_L \equiv 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t}$$

y las ecuaciones dinámicas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_L = \rho$$

$$\vec{J}_T + \frac{\partial \vec{D}_T}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_T$$

$$\vec{J}_L + \frac{\partial \vec{D}_L}{\partial t} \equiv 0$$

Las ecuaciones longitudinales son en realidad restricciones que fijan las componentes longitudinales $\vec{E}_L$ y $\vec{B}_L$, y por tanto, no son verdaderas ecuaciones que determinan la evolución dinámica de los campos, como veremos mes en detalle con las teorías gauge.

Los significados del campo electromagnético

Para medios materiales isotrópos y homogéneos las relaciones de constitución se pueden descomponer de la forma

$$\epsilon \vec{E}_{L,T} = \vec{D}_{L,T} \quad \mu \vec{H}_{L,T} = \vec{B}_{L,T}$$

$$\sigma \vec{E}_{L,T} = \vec{J}_{L,T}$$

Por el teorema Helmholtz tenemos

$$\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{A}_L + \vec{A}_T = -\vec{\nabla} \phi_A + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_E$$

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E}_L + \vec{E}_T = -\vec{\nabla} \phi_E + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_E$$

A ϕ_E se le denomina habitualmente como ϕ_L , por estar relacionado con la componente longitudinal del campo eléctrico.

En función de los potenciales electromagnéticos, las componentes del campo eléctrico toma la expresión

$$\vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t}$$

$$\vec{E}_L = -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi_E = -\vec{\nabla} \phi_L$$

128

habiéndose definido

$$\phi_L \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \phi_A}{\partial t} + \phi$$

También se deben cumplir las identidades

$$\vec{A}_E \equiv -\frac{\partial \vec{A}_A}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \phi_T \equiv -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t}$$

Mediante una transformación gauge de los potenciales electromagnético, se puede imponer las condiciones

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L = -\nabla^2 \phi_A = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Gauge de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L = -\nabla^2 \phi_A = 0$$

Gauge de Coulomb

por lo que $\vec{A}_L$ esta determinado solamente por la condiciones de contorno. Por tanto, para definir el estado dinámico basta fijar las posiciones y las velocidades de las cargas y las componentes transversales $\vec{E}_T$ y $\vec{B}_T$.

Con el gauge de radiación, al no haber fuentes de cargas será $\phi_L = 0$.

Las ecuaciones de $\vec{A}_T$ y ϕ_E para el vacío vienen dadas por

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A}_T &= -\mu_0 \vec{J}_T + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \phi_L &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Observemos que ϕ_E es el potencial instantáneo generado por la distribución de cargas ρ , por lo que $\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi_E$ es el campo eléctrico ligado a la posición instantánea de dichas cargas. Por ello $\vec{E}_T$ se debe asociar a un campo de radiación externo a las anteriores cargas ρ .

Una propiedad importante es que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \equiv \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi_L$$

que nos dice que $\vec{A}_T$ y ϕ_L son siempre un invariante ante una transformación gauge. Esto sugiere, que en los sistemas electrodinámicos se elimina la incertidumbre gauge si se reemplaza $\vec{A}$ por $\vec{A}_T$ y ϕ por ϕ_L . La componente A_L no es invariante ante una transformación gauge, y por tanto, no es tampoco un observable medible, por lo que lo más adecuado es eliminarlo de las ecuaciones físicas mediante una transformación gauge conveniente. Debe tenerse en cuenta, que los observables medibles mediante las fuerzas de interacción, son el campo eléctrico y magnético, ya que son invariantes ante las transformaciones gauge.

De acuerdo con esto, la densidad de fuerza de Lorentz también puede descomponerse en una componente longitudinal y otra transversal

$$\begin{aligned}\vec{f}_L &= \rho \vec{E}_T = -\rho \vec{\nabla} \phi_L \\ \vec{f}_T &= \rho \vec{E}_T + \vec{J} \wedge \vec{B}_T = -\rho \frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} + \vec{J} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T\end{aligned}$$

Consideremos ahora el gauge de Coulomb, y al ser $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv 0$, entonces el potencial vector es un campo transversal puro y $\vec{A} \equiv \vec{A}_T$. Las ecuaciones de $\vec{A}_T$ y ϕ_L para el vacío vienen entonces dadas por

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A}_T &= -\mu_0 \vec{J}_T + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \phi_L &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

donde $\vec{J}_T$ es la componente transversal o solenoidal de la corriente. La corriente $\vec{J}$ siempre se puede descomponer en una componente transversal y otra longitudinal

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_T$$

de forma que se verifique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J}_L = 0$$

El potencial ϕ_L es el potencial instantáneo de Coulomb creado por la distribución de carga ρ

$$\phi_L(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

que para un conjunto de cargas puntuales se puede escribir como

$$\phi_L(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_r \frac{q_r}{|\vec{x} - \vec{x}_r|}$$

La componente longitudinal del campo eléctrico $\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi_L$ está por tanto ligada a la posición instantánea de las cargas

$$\vec{E}_L(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \phi_L = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \rho(\vec{x}', t) d^3\vec{x}'$$

Como veremos en el capítulo de teorías gauge, $\vec{E}_T$ estará asociado a un campo de radiación externo. Las corrientes transversales y longitudinales se pueden obtener a partir de la identidad vectorial

$$\nabla^2 \vec{J} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{J}$$

y teniendo en cuenta el teorema de Helmholtz, será

$$\begin{aligned} \vec{J}_T(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \\ \vec{J}_L(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \end{aligned}$$

La corriente longitudinal también se puede escribir como

$$\vec{J}_L = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi_L$$

Todo esto se puede ver también de otra forma. Si tomamos los rotacionales de las ecuaciones vectoriales de Maxwell, después de algunas manipulaciones simples, se llega a que el campo electromagnético verifica las ecuaciones de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J}$$

que separadas en componentes longitudinales y transversales resulta

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E}_L = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}_L}{\partial t}\right)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E}_T = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_T}{\partial t}$$

Vemos que $\vec{E}_L$ es un campo retardado y que tiene un carácter no local

$$\vec{E}_L = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \cdot \rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \vec{J}_L(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \rho\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) d^3\vec{x}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \vec{J}_L\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

Vemos que el primer término del campo eléctrico longitudinal corresponde a los efectos del potencial de Coulomb retardado en el tiempo.

La componente transversal también se puede escribir de forma integral como

$$\vec{E}_T = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \vec{J}_T(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

El segundo término debido a la variación de corriente con el tiempo, analizaremos con detalle su significado en el capítulo de teorías de la causalidad.

De las identidades

$$\int \vec{E}^2 d^3\vec{x} = \int \vec{E}_T^2 d^3\vec{x} + \int \vec{E}_L^2 d^3\vec{x} + \int \vec{E}_L \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x}$$

$$\int \vec{E}_T \cdot \vec{E}_L d^3\vec{x} = - \int \vec{\nabla} \phi_L \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x} = - \int \vec{\nabla} \cdot (\phi_L \vec{E}_T) d^3\vec{x} + \int \phi_L \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x} \equiv 0$$

$$\int \vec{E}_L^2 d^3\vec{x} = \int (\vec{\nabla} \phi_L)^2 d^3\vec{x} = \int \vec{\nabla} \cdot (\phi_L \vec{\nabla} \phi_L) d^3\vec{x} - \int \phi_L \nabla^2 \phi_L d^3\vec{x} = \int \frac{\rho \phi_L}{\epsilon_0} d^3\vec{x}$$

se obtiene la relación

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3 \vec{x} \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}_T^2 d^3 \vec{x} + V_C$$

donde V_C es la energía potencial de Coulomb instantánea

$$V_C = \int \rho \phi_L d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{r,l} \frac{q_r q_l}{|\vec{x}_r - \vec{x}_l|}$$

Componentes longitudinales y transversales del campo electromagnético en las relaciones de conservación

Un método de separación de las energías es escoger V_C como la energía potencial asociada a las partículas. Puesto que V_C supone una interacción instantánea esto solo es aplicable a partículas no relativistas en la aproximación cuasiestática. Según esto será

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_p &= \mathcal{E}_p + V_C = \sum_r \frac{m_r}{2} \left(\frac{d\vec{x}_r}{dt} \right)^2 + V_C \\ \tilde{\mathcal{W}}_c &= \mathcal{W}_c - V = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3 \vec{x} - V_C \end{aligned}$$

de forma que es constante la energía total

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}_p + \tilde{\mathcal{W}}_c = \mathcal{E}_p + \mathcal{W}_c = c^{te}$$

Evidentemente la fuerza $F_r(\vec{x}_r)$ que actúa sobre la partícula situada en $\vec{x}_r$ sera

$$F_r(\vec{x}_r) = q_e \vec{E}_L(\vec{x}_r, t) = - \frac{\partial V_C}{\partial \vec{x}_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l \neq r} \frac{(\vec{x}_r - \vec{x}_l)}{|\vec{x}_r - \vec{x}_l|^2} q_r q_l$$

La energía asociada al campo vendrá dada por

$$\tilde{\mathcal{W}}_c = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3 \vec{x} - V_C = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}_T^2 + c^2 \vec{B}^2) d^3 \vec{x}$$

A $\tilde{\mathcal{W}}_c$ se la conoce habitualmente como la energía de radiación.

Puesto que la energía radiada originada por el movimiento de las cargas es despreciable, $\vec{E}_T$ es el campo que una carga de prueba experimentaría si todas las partículas fueran eliminadas del sistema, y correspondería entonces con el campo eléctrico de radiación externo presente.

La energía del campo eléctrico longitudinal está asociada a la interacción instantánea de Coulomb de las cargas. Debe tenerse en cuenta, que el campo eléctrico no puede

ser nunca puramente longitudinal, debiendo existir también una componente transversal su varía con el tiempo.

La variación de la energía del campo electromagnético en esta caso viene dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c}{dt} &= \int_V \varepsilon_0 \left(\vec{E}_T \cdot \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial t} + c^2 \vec{B}_T \cdot \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} \right) d^3x \\ \frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c}{dt} &= \int_{V_\infty} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_T \cdot \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} - \vec{E}_T \cdot \vec{j}_T - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_T \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_T \right) d^3x \\ &= -\Sigma q_r \vec{v}_r \cdot \vec{E}_T(\vec{x}_r, t) - \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial V} (\vec{E}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

que es la expresión de la conservación de la energía para las componentes transversales, y que como hemos comentado en teorías vectoriales, $\vec{E}_T$ está asociada a la parte propagante de la radiación que contribuye al balance de energía. La parte de energía del campo no propagante $\tilde{\mathcal{W}}_{cl}$ está asociada a la componente longitudinal

$$\tilde{\mathcal{W}}_{cl} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E}_L^2 d^3x = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \phi d^3x = \Sigma q_r \phi_r(\vec{x}_r, t)$$

Su variación en el tiempo será

$$\frac{d\tilde{\mathcal{W}}_{cl}}{dt} = \varepsilon_0 \int_V \vec{E}_L \cdot \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t} d^3x = \int_V \vec{E}_L \cdot \vec{j}_L d^3x = -\Sigma q_r \vec{v}_r \cdot \vec{E}_L(\vec{x}_r, t)$$

En volumen V , se verifica el balance de energía

$$\frac{d\tilde{\mathcal{W}}_c}{dt} + \frac{d\tilde{\mathcal{W}}_{cl}}{dt} = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} - \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial V} (\vec{E}_T \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

La energía de las partículas que es gauge invariante y vendrá dada por

$$\tilde{\mathcal{E}}_p = \mathcal{E}_p + V_C = \sum_r \frac{m_r}{2} \left(\frac{d\vec{x}_r}{dt} \right)^2 + V_C$$

Su variación con el tiempo vendrá dada por

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}_p}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} + \frac{dV_C}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E}_T d^3\vec{x} = \Sigma q_r \vec{v}_r \cdot \vec{E}_T(\vec{x}_r, t)$$

es decir, las partículas en el caso no relativista adquieren energía a partir del campo eléctrico transversal $\vec{E}_T$ de la radiación externa, manteniéndose la energía total siempre constante.

A partir de las relaciones de ortogonalidad y de las ecuaciones de Maxwell, se obtiene para las componentes transversales

$$\int_V \left(\vec{E}_T \cdot \vec{j}_T + \left(\vec{E}_T \cdot \frac{\partial \vec{D}_T}{\partial t} + \vec{H}_T \cdot \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} \right) d^3x \right) + \int_S (\vec{E}_T \wedge \vec{H}_T) \cdot d\vec{S} = 0$$

Por tanto la componente transversal del efecto Joule $\vec{E}_T \cdot \vec{j}_T$, se balancea con las componentes transversales de la densidad de energía $\vec{E}_T \cdot \partial \vec{D}_T / \partial t + \vec{H}_T \cdot \partial \vec{B}_T / \partial t$ y la parte propagante del vector Poynting

$$\vec{S}_{cT} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E}_T \wedge \vec{H}_T.$$

Para las componentes transversales se obtiene

$$\int_V \vec{E}_L \cdot \vec{j}_L d^3x + \int_V \vec{E}_L \cdot \frac{\partial \vec{D}_L}{\partial t} d^3x = 0$$

La componente longitudinal del efecto Joule $\vec{E}_L \cdot \vec{j}_L$ se compensa con la variación longitudinal $\vec{E}_L \cdot \partial \vec{D}_L / \partial t$.

La parte longitudinal de la densidad de flujo,

$$\vec{S}_{cL} = \vec{E}_L \wedge \vec{H}_L$$

que no se debe confundir con un vector longitudinal, no contribuye al balance de energía al ser $\int_S \vec{S}_{cL} \cdot d\vec{S} = 0$, y por tanto, se le denomina componente no propagante del flujo de energía.

El momento transversal del campo eléctrico $\vec{P}_{cT}$ (también llamado $\vec{G}$), viene dado por la parte propagante $\vec{S}_{cT}$ del flujo de energía

$$\vec{P}_{cT} = \frac{1}{c^2} \int_{V^\infty} \vec{S}_{cT} d^3x = \epsilon_0 \int_{V^\infty} (\vec{E}_T \wedge \vec{B}_T) d^3x = \epsilon_0 \int_{V^\infty} (\vec{E}_T \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T) d^3x = \epsilon_0 \int_{V^\infty} E_T^j \partial_i A_T^i d^3x$$

Para las componentes longitudinales, haciendo unos cálculos similares se obtiene

$$\vec{P}_{cL} = \epsilon_0 \int_{V^\infty} (\vec{E}_L \wedge \vec{B}_T) d^3x$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\vec{E}_L \wedge \vec{B}_T = -\vec{\nabla} \phi_L \wedge \vec{B}_T = \phi_L \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_T - \vec{\nabla} \wedge (\phi_L \vec{B}_T) = -\phi_L \nabla^2 \vec{A}_T - \vec{\nabla} \wedge (\phi_L \vec{B}_T)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{P}_{cL} &= \varepsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{E}_L \wedge \vec{B}_T d^3x = -\varepsilon_0 \int_{V^\infty} \phi_L \nabla^2 \vec{A}_T d^3x = -\varepsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{A}_T \nabla^2 \phi_L d^3x \\ &= \varepsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{A}_T \nabla^2 \phi_L d^3x = \varepsilon_0 \int_{V^\infty} \rho \vec{A}_T d^3x = \Sigma q_r \vec{A}_T(\vec{x}_r, t) \end{aligned}$$

Por tanto, $q\vec{A}_T$ está ligado solo a la componente longitudinal del momento del campo electromagnético.

Hemos visto antes que ϕ_L es el potencial de Coulomb instantáneo generado por una distribución de cargas, y $\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi_L$ es el campo eléctrico asociado a la posición instantánea de dichas cargas.

Por consiguiente, $\vec{E}_T$ está asociado a un campo de radiación externo a las cargas. Veremos en el capítulo de teorías gauge que esto tiene importantes consecuencias físicas cuando se quiere separa la energía total en una parte asociada a la materia y otra al campo electromagnético.

Una relación importante de los potenciales es

$$\begin{aligned} \int_{V^\infty} \rho \vec{A} d^3x &= -\varepsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{A} \nabla^2 \phi d^3x = -\varepsilon_0 \int_{V^\infty} \phi \nabla^2 \vec{A} d^3x = -\varepsilon_0 \int_{V^\infty} \phi \vec{\nabla} \wedge \vec{B} d^3x \\ \int_{V^\infty} \rho \vec{A} d^3x &= -\varepsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{\nabla} \phi \wedge \vec{B} d^3x = \varepsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{E} \wedge \vec{B} d^3x = \vec{P}_{cT} + \vec{P}_{cL} = \vec{P}_c \end{aligned}$$

El momento total viene dado por

$$\vec{P} = \vec{P}_m + \varepsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{E} \wedge \vec{B} d^3x = \vec{P}_L + \frac{1}{c^2} \int_{V^\infty} \vec{E}_T \wedge H d^3x$$

donde $\vec{P}_L$ es el momento canónico total definido por

$$\vec{P}_L \stackrel{\text{def}}{=} \vec{P}_m + \vec{P}_{cL}$$

que es invariante ante una transformación gauge, siendo $\vec{P}_m$ el momento mecánico total de la materia, y $\vec{P}_{cL}$ (que no es un vector longitudinal) la componente del campo que contribuye al balance de energía. Para un conjunto de cargas puntuales toma la expresión

$$\vec{P}_L = \Sigma (m_r \vec{v}_r + q_r \vec{A}_T(\vec{x}_r, t))$$

Los significados del campo electromagnético

Veremos en el capítulo de teorías canónicas, que este momento corresponde a la suma de los momentos canónicos, y que es gauge invariante.

El momento cinético total del campo electromagnético viene dado por

$$\begin{aligned}\vec{J}_c &= \int_{V^\infty} \vec{x} \wedge \vec{P}_c d^3x = \epsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{x} \wedge \vec{E}_T \wedge \vec{B}_T d^3x = \epsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{x} \wedge \vec{E}_T \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_T d^3x \\ &= \epsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{x} \wedge \vec{\nabla}_A (\vec{E}_T \cdot \vec{A}_T) d^3x + \epsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{E}_T \wedge \vec{A}_T d^3x\end{aligned}$$

donde $\vec{\nabla}_A$ significa que el gradiente solo actúa sobre $\vec{A}_T$.

El momento cinético total

$$\vec{J}_c = \vec{L}_c + \vec{S}_{espín}$$

se puede descomponer en el momento angular $\vec{L}_c$ y el momento cinético orbital $\vec{L}_c$ que representa el espín del campo, y a los que contribuye solo la componente transversal del campo eléctrico, que es debida al campo de radiación externo

$$\begin{aligned}\vec{L}_c &= \epsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{x} \wedge \vec{\nabla}_A (\vec{E}_T \cdot \vec{A}_T) d^3x \\ \vec{S}_{espín} &= \epsilon_0 \int_{V^\infty} \vec{E}_T \wedge \vec{A}_T d^3x\end{aligned}$$

Si $\vec{J}_m$ es el momento cinético total de las partículas, el momento angular total del sistema viene dado por

$$\vec{J} = \vec{J}_m + \vec{L}_c + \vec{S}_{espín}$$

Ondas electromagnéticas

Con sus experimentos de interferencia y difracción, Fresnel y Young ya habían predicho la naturaleza ondulatoria de la luz. Sin embargo, fue Hertz quien demostró experimentalmente la naturaleza electromagnética de la radiación y de la luz, y quien construyó por primera vez un generador de ondas de radio para realizar los experimentos de interferencia, demostrando que se comportaban como ondas transversales.

En el vacío donde no hay cargas ni corrientes, la segunda y cuarta ecuación de Maxwell se escriben como

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando el rotacional de ambas ecuaciones, obtenemos

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Una solución de estas ecuaciones son las ondas planas

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_0)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_0)$$

que introduciéndolas en las otras ecuaciones de Maxwell, se comprueba que se debe verificar

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad c|\vec{k}| = \omega$$

De lo anterior se deduce que en una onda electromagnética $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares y se encuentran en un plano que es perpendicular a la dirección de propagación $\vec{k}$, por lo que el campo electromagnético se propaga en el vacío como ondas transversales.

Las ondas electromagnéticas están caracterizadas por su frecuencia angular ω y su dirección de propagación $\vec{k}$. Muchas veces se emplea el periodo T o la frecuencia ν y la longitud de onda λ que vienen definidos por

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Anteriormente vimos que el principio de la conservación de la energía viene dado en el vacío por

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial w_c}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c$$

Siendo w_{em} densidad de energía del campo electromagnético

$$w_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$$

y $\vec{S}_c$ la densidad de flujo de energía

$$\vec{S}_c = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Como ya hemos comentado, si aplicamos la ley de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, la anterior ecuación de la conservación de la energía ya no es invariante ante una inversión en el tiempo $t \rightarrow -t$, por lo que existe una flecha del tiempo que determina los procesos de disipación de energía. Esto también se ve en que $\vec{S}_c$ da un flujo de energía saliente.

Radiación electromagnética. Antenas

Con sus experimentos de interferencia y difracción, Fresnel y Young ya habían predicho la naturaleza ondulatoria de la luz. Fue Hertz quien demostró experimentalmente que la naturaleza electromagnética de la radiación y de la luz, y quién construyó por primera vez un generador de ondas de radio para realizar los experimentos de interferencia, demostrando que se comportaban como ondas transversales.

Analizaremos ahora uno de los orígenes más habituales de la radiación electromagnética, como el debido a la radiación dipolar eléctrica en antenas.

Para el gauge de Lorentz, hemos visto que los potenciales verifican las ecuación de ondas no homogéneas

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

cuya solución viene dada por

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \end{aligned}$$

donde las integrales están evaluadas en el tiempo retardado $t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$, teniendo en cuenta la velocidad finita c de propagación del campo desde $\vec{x}'$ al punto de observación $\vec{x}$.

Si suponemos que la distancia al punto de observación es mucho mayor que las dimensiones de las fuentes -por lo que estará muy lejos de ellas-, se pueden utilizar

como aproximación las expresiones obtenidas anteriormente para el caso estático, pero tomando para las fuentes su valor en el instante retardado $t_r = t - |\vec{x}|/c$ que tiene en cuenta el tiempo de propagación debido a la velocidad c finita de la luz. El cálculo exacto de los potenciales es muy complejo, por lo que utilizaremos la aproximación de campo lejano en el límite no relativista cuando todas las velocidades son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

Sobre una carga q en un campo electromagnético actúa una fuerza de Lorentz

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right)$$

Si suponemos que la carga q se mueve con una velocidad $\vec{v}$ muy pequeña comparada con la velocidad de la luz $|\vec{v}| \ll c$, podemos considerar que en cada instante el campo eléctrico tiene la forma de Coulomb y que, según la ley de Biot-Savart el campo de inducción magnético vendrá dado por

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

El potencial vector se puede calcular resolviendo la ecuación $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$ y retardando la solución debido al tiempo $|\vec{x}|/c$ que tardan los efectos en propagarse, con lo que se obtiene

$$\vec{A}_r(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}(t_r)}{|\vec{x}|} \quad t_r = t - |\vec{x}|/c$$

El campo magnético para este potencial retardado será

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}(t_r) \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\vec{a}(t_r) \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$

siendo $\vec{a}(t_r)$ la aceleración de la carga en el instante t_r .

A distancias cortas en que $|\vec{x}| \ll ct$, domina el primer término, y el campo instantáneo es similar al de una carga eléctrica en movimiento. Para grandes distancias en que se cumple $|\vec{x}| \gg ct$, en la llamada región de ondas, domina el segundo término que da origen al campo de radiación

$$\vec{B}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\vec{a}(t_r) \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$

que se encuentra en un plano perpendicular a la dirección de observación.

El campo eléctrico asociado a la onda será

$$\vec{E}_{rad} = c\vec{B}_{rad} \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\vec{a}(t_r) \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x} \vec{x} - \vec{a} |\vec{x}|^2)}{|\vec{x}|^3}$$

Es importante observar que sólo influye la aceleración de la carga proyectada sobre el plano perpendicular a la dirección de observación.

Si θ es el ángulo que forma la aceleración con la dirección de observación, tendremos

$$\vec{E}_{rad} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{a}(t_r) \sin(\theta)}{|\vec{x}|}$$

El vector Poynting del flujo de energía será

$$\vec{S}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\vec{a}(t_r)|^2 \sin^2(\theta)}{|\vec{x}|^2} \vec{n}$$

siendo $\vec{n} = \vec{x}/|\vec{x}|$.

Vemos que no se emite radiación en la dirección de la aceleración $\theta = 0$.

La radiación de una carga acelerada es la base de la radiación por antenas de un dipolo eléctrico oscilante.

Observemos que $\vec{E}_{rad}$ y $\vec{B}_{rad}$ en cada punto del espacio son perpendiculares a la dirección de observación $\vec{n}$ y de propagación de la energía.

Existe otra forma de calcular el campo de radiación aplicando el concepto de líneas de fuerzas que fue ideado por Thomson, mostrando que los análisis conceptuales cualitativos nos dan a veces una explicación más profunda de lo que físicamente está ocurriendo.

Supongamos que una carga q en el origen de coordenadas de un sistema recibe un impulso de aceleración $\vec{a}$ durante un intervalo de tiempo muy pequeño Δt en el sentido del eje positivo. Después de un tiempo t_0 la distancia recorrida por la onda será $\Delta v t_0 = (a\Delta t)t_0$. Si $c\Delta t \gg \Delta v t_0$, el campo eléctrico para $t > t_0 + \Delta t$ será el campo radial de una carga puntual centrada en el origen para $|\vec{x}| > c t_0 + c\Delta t$, y para $t < t_0$ será el de una carga puntual centrada con el origen desplazado en $\Delta v t_0$. Para la corona $t_0 < t < t_0 + \Delta t$, por continuidad de las líneas del campo eléctrico dentro y fuera de la corona, el campo eléctrico tendrá una componente tangencial E_θ y una radial E_r que por geometría analítica, a partir de la proyección de las normales a las superficies, se determina que estarán en la relación

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\Delta v t_0 \sin(\theta)}{c\Delta t} \gg 1$$

Aproximando el campo radial por el de una carga puntual, obtenemos

$$E_{\theta} \approx \frac{q \operatorname{sen}(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{x}|}$$

El flujo de energía S_{rad} es igual a

$$S_{rad}(|\vec{x}|, \theta) = c w = c \epsilon_0 \vec{E}^2 \approx \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{|\vec{x}|^2}$$

El flujo de energía radiado por una antena de dipolo eléctrico se obtiene a partir de la anterior expresión haciendo $\ddot{p} = qa$

La partícula sufrirá por tanto una pérdida de energía igual a la potencia radiada por segundo

$$-\frac{dE}{dt} = P_{rad} = \int_0^{\pi} \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \operatorname{sen}^2(\theta) 2\pi \operatorname{sen}(\theta) d\theta = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Es importante observar que los resultados son obtenidos para el sistema de reposo instantáneo de la partícula, de acuerdo con el tercer postulado de la relatividad que veremos más adelante.

Por tanto, la intensidad de radiación en la aproximación dipolar eléctrica viene determinada solamente por el valor de la aceleración del dipolo eléctrico $\ddot{p}(t - |\vec{x}|/c)$.

Otro hecho importante es que la energía radiada por unidad de superficie disminuye con el cuadrado de la distancia, por lo que el vector Poynting juega un papel fundamental en los procesos de radiación, ya que la energía total sobre una superficie esférica es constante e independiente de la distancia.

La partícula pierde energía al radiar y sufre una fuerza de frenado como veremos. Aunque la radiación lleva asociado también un momento, por razones de simetría el momento total de la radiación es nulo.

La pérdida de energía actúa como una resistencia disipativa. Además en una antena, los campos producidos por la cargas en movimiento en una parte reaccionan sobre las cargas en otra parte.

Estas expresiones coinciden con el resultado anterior para la radiación de un dipolo. En una antena de dipolo, $p = ql$ donde l es la longitud de la antena. Entonces será $\ddot{p} = \dot{q}l = Il$, donde I es la intensidad de corriente en la antena.

Si suponemos una variación periódica con frecuencia ω , para una corriente en antena $I = \sqrt{2} \tilde{I} e^{-i\omega t}$, la potencia media radiada vendrá dada por:

$$P_{rad} = \frac{l^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \bar{I}^2 = \bar{I}^2 R_e$$

donde R_e es la resistencia a la radiación del dipolo eléctrico oscilante

$$R_e = \frac{l^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3c\epsilon_0} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 787 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ohmios}$$

Un hecho a observar, es que la energía radiada tiene una dirección del tiempo determinada, ya que la energía fluye siempre hacia afuera. Las relaciones de transformación de Lorentz, son invariantes ante la inversión del tiempo, pero el fenómeno de radiación rompe esta simetría y marca una flecha del tiempo, como ocurre en todos los fenómenos de disipación de energía.

Otra cuestión es que, si una onda electromagnética de luz incide en un átomo, sobre los electrones actuará una fuerza periódica $q\vec{E}$ que los obliga a oscilar como un dipolo. Por ello radiaran energía de acuerdo con la fórmula anterior, que dependerá de la cuarta potencia de la frecuencia y con una dirección de dispersión dominante, perpendicular a la dirección incidente.

Este es el motivo por el que el cielo se ve azul, ya que la luz proveniente del sol en la alta atmosfera se dispersa lateralmente con preferencia para las frecuencias altas, que corresponde al espectro azulado.

En las puestas de sol, en las que la luz nos llega directamente del horizonte, las componentes azuladas de las frecuencias altas han sido totalmente dispersadas lateralmente, por lo que vemos la luz roja.

Cuando la luz se propaga en un material, se producen permanentemente estos fenómenos de absorción y reemisión de radiación. Sin embargo, veremos más adelante que los tratamientos se simplifican considerando que la luz se propaga de forma continua con una velocidad v dependiente del índice de refracción $v = c/n = c\sqrt{\epsilon_0/\epsilon}$. La constante dieléctrica ϵ es una magnitud que se determina experimentalmente y es un buen modelo fenomenológico para simplificar los cálculos, pero los fenómenos reales en la naturaleza son mucho más complejos y requieren conocer la estructura atómica de la materia como ya veremos.

Muchas veces, nuestros formalismos son isomorfos con los comportamientos de la naturaleza, pero no hay que olvidar que son sólo modelos y simplificaciones conceptuales. Sin embargo, conocer cuáles son los límites reales de esos modelos no

es fácil de determinar siempre a priori, y requiere que se pongan a prueba experimentalmente.

Las teorías sobre la naturaleza de la luz son un ejemplo de modelos que siguen un camino que avanza zigzagueante, con formulaciones cada vez más complejas y de mayor capacidad de predicción experimental, pero que no dejan de ser siempre una representación parcial de la realidad de la naturaleza, que no se muestra siempre intuitiva.

La naturaleza real del campo electromagnético y de la luz es mucho más compleja que nuestros modelos por muy sofisticados que sean.

Basta recordar la teoría corpuscular de la luz de Newton, antitética a la teoría ondulatoria de Huyghens, que fue confirmada posteriormente por Maxwell y los experimentos de interferencia y difracción de Fresnel, Young y Hertz. El retorno posterior a la teoría corpuscular del fotón de Einstein, confirmada experimentalmente por el efecto fotoeléctrico y Compton, junto con la teoría opuesta de la relatividad, en que los campos transportan energía y momento de forma continua.

Le siguió la poco intuitiva teoría cuántica de la radiación, con la doble naturaleza de corpuscular y ondulatoria, y luego la extraña teoría de la electrodinámica cuántica de Feynman, con la que se desvanecen conceptos como la fuerza de Coulomb, que predice se debe a un intercambio de momento por medio del intercambio de fotones virtuales.

De forma general las teorías sobre el campo electromagnético se pueden clasificar en teorías dualistas y no-dualistas. Son dualistas aquellas para las que la masa y la carga son entidades separadas del campo que ellas mismas generan.

Entre las teorías dualistas se destaca la de Maxwell y Lorentz en que la fuerza de Lorentz es el nexo de como el campo electromagnético interacciona con la materia. Teorías dualistas son también la teoría cuántica de partículas y la teoría cuántica de la radiación en que los fotones tienen una dualidad como onda y corpúsculos.

Se han elaborado varias teorías no dualistas que tratan de que las propiedades de las partículas estén determinadas solo por las características del campo y, así evitar también, las inconsistencias de la teoría de Maxwell debidas a la propia autointeracción del campo generado por una partícula con ella misma. Si bien estas teorías resuelven algunos aspectos, en otros son incompletas. Solo la teoría cuántica de campos y la electrodinámica cuántica de Feynman son las únicas teorías no dualistas que en el presente parecen construir un marco coherente de unificación de las propiedades de la materia y sus interacciones.

Los significados del campo electromagnético

En los capítulos siguientes analizaremos varias teorías y modelos en los que el campo electromagnético y la luz se transforman con aspectos diferentes, aunque su realidad sea la misma, descubriéndose nuevas relaciones con la naturaleza.

